# אלגברה 1 מ

## פרק 12 - מרחבי מכפלה פנימית

### תוכן העניינים


1. מרחבי מכפלה פנימית ..... 1
2. הנורמה והמרחק ..... 3
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים ..... 5
4. אורתוגונליות ..... 8
5. משלים אורתוגונלי ..... 11

# מרחבי מכפלה פנימית

## שאלות

**1)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב-$\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^2$.

**2)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב-$\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^2$?

**3)** לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, ב-$\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^3$?

**4)** לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ב-$\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

**5)** לכל שתי מטריצות $A,B$ ב-$M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

**6)** לכל שתי פונקציות $f$, $g$ ב-$C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה מכפלה פנימית על $R^3$ , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

## תשובות סופיות

**1)** ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

**2)** $k>9$

**3)** $-1<k<1$

**4)** עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

**5)** ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

**6)** ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

**7)** $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמה והמרחק

## שאלות

**1)** נתונים שלושה וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב-$\mathbb{R}^3$, חשבו:

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

**2)** נתונות שלוש מטריצות ב-$M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב-$M_{2\times3}[R]$,

חשבו:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

**3)** נתונים שלושה פולינומים ב-$C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$,

חשבו:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי $V$ ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

## תשובות סופיות

1) א. 19 ב. $-5$ ג. $-3$ ד. $-8$
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. $-12$ ג. 173 ד. $-24$ ה. $-3168$
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. $-9.5833$ ג. $-0.5833$ ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

## שאלות

**1)** הוכיחו כי אם $u,v$ תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right|=\|u\|\cdot\|v\|$.

**2)** יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

**3)** יהיו $f,g$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- $R^n$.
הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\ldots+u_nv_n\right|\le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $\left(u_1+\ldots+u_n\right)^n\le n\left(u_1^2+\ldots+u_n^2\right)$.

**5)** נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

**6)** הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

**7)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

**9)** נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

**11)** חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1,2,2)$, $v = (-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

**12)** חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3,4)$, $v = (1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

**13)** מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית $\theta$ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, dx$ שב- $C[0,1]$.

**14)** מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית $\theta$ שבין $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- $u$ ו- $v$ הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** שאלת הוכחה.
**3)** שאלת הוכחה.
**4)** שאלת הוכחה.
**5)** שאלת הוכחה.
**6)** שאלת הוכחה.
**7)** שאלת הוכחה.
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** שאלת הוכחה.
**11)** $\theta=63.61°$
**12)** $\theta=9.44°$
**13)** $\cos\theta=0.173°$
**14)** $\cos\theta=0.00036°$
**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורתוגונליות

## שאלות

**1)** הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

**2)** מצאו את ערכו של הקבוע $k$, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

**3)** מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

**4)** הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$
אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

**5)** במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

**6)** נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצאו את הערך של הקבוע $k$, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

**7)** הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

**8)** הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

**10)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

**11)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם $\alpha$ היא הזווית בין $a$ ל- $b$, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

**12)** יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה $k$.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- $w_1$.
מהו המרחק של $v$ מ- $w_1$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משלים אורתוגונלי

## שאלות

**1)** יהי $W = span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

**2)** יהי $w = span\{(1,1,1)\}$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

**3)** יהי $W = span\{x\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

**4)** יהי $W = span\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

**5)** יהי $W = span\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2\times 2}[R]$.

**6)** מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

**7)** מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

**8)** נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x} = 0$.
יהי $U$ מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- $U$ בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה $A$.

**9)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נניח ש- $W$ הוא תת קבוצה של $V$.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

**11)** נניח ש- $W$ הוא תת קבוצה של $V$.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם $V$ מממד סופי).

**12)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

**13)** נניח ש- $W_1, W_2$ הן תת קבוצות של $V$.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

## תשובות סופיות

**1)** $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

**2)** $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

**3)** $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

**4)** $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

**5)** $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

**6)** $$B_W = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

**7)** $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

**8)** הסבר בווידאו.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©