

# אלגברה ליניארית

פרק 12 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ..... 1
2. הנורמה והמרחק ..... 3
3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים ..... 5
4. אורתוגונליות ..... 8
5. משלים אורתוגונלי ..... 11

## מרחבי מכפלה פנימית

### שאלות

(1) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ .

(2) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ ?

(3) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  ב- $\mathbb{R}^3$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$ ?

(4) לכל שני וקטורים  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ב- $\mathbb{R}^n$ ,

נגדיר:  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$ , כאשר  $k_1, \dots, k_n$  מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$ .

מהי המכפלה המתקבלת אם  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?

(5) לכל שתי מטריצות  $A, B$  ב- $M_{mn}[R]$ , נגדיר:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .

$\text{tr}$  מייצג את המילה  $\text{trace}$  (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות  $f, g$  ב- $C[a, b]$ , נגדיר:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .

- (7) נתונה מכפלה פנימית על  $R^3$ , שעבורה הקבוצה  $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$  מהווה בסיס אורתונורמלי. חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$ .

### תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2)  $k > 9$
- (3)  $-1 < k < 1$
- (4) עבור  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ , נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .
- (7)  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

## הנורמה והמרחק

## שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ :  $u = (1, -2, 2)$ ,  $v = (3, -2, 6)$ ,  $w = (5, 3, -2)$ .

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$ , חשבו:

- |                           |                           |                           |                               |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| א. $\langle u, v \rangle$ | ב. $\langle u, w \rangle$ | ג. $\langle v, w \rangle$ | ד. $\langle u + v, w \rangle$ |
| ה. $\ u\ $                | ו. $\ v\ $                | ז. $\ u + v\ $            | ח. $d(u, v)$                  |
| ט. $\hat{u}$              | י. $\hat{v}$              |                           |                               |

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2 \times 3}[R]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 3}[R]$ ,

חשבו:

- |                           |                                    |                               |
|---------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| א. $\langle A, B \rangle$ | ב. $\langle A, C \rangle$          | ג. $\langle A, B + C \rangle$ |
| ד. $\langle B, C \rangle$ | ה. $\langle 4A + 10B, 11C \rangle$ | ו. $\ A\ $                    |
| ז. $\ B\ $                | ח. $d(A, B)$                       | ט. $\hat{A}$                  |

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0, 1]$ :

$$p(x) = x + 3, q(x) = 3x + 1, r(x) = x^2 - 4x - 1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ ,

חשבו:

- |                           |                           |                               |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| א. $\langle p, q \rangle$ | ב. $\langle p, r \rangle$ | ג. $\langle p, q + r \rangle$ |
| ד. $\ p\ $                | ה. $d(p, q)$              | ו. $\hat{r}$                  |

$$(4) \text{ הוכיחו: } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$(5) \text{ הוכיחו: } \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$(6) \text{ הוכיחו: } \langle u-v, u+v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$(7) \text{ הוכיחו: } \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

$$(8) \text{ הוכיחו: } \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle$$

$$(9) \text{ יהי } V \text{ ממ"פ ויהיו } u, v \in V \text{ וקטורים המקיימים: } \|u\| = a, \|u+v\| = b, \|u-v\| = c$$

מצאו את  $\|v\|$  ואת  $\langle u, v \rangle$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. 19      ב. -5      ג. -3      ד. -8  
 ה. 3      ו. 7      ז.  $\sqrt{96}$       ח.  $\sqrt{20}$   
 ט.  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$       י.  $\left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$
- (2) א. 185      ב. -12      ג. 173      ד. -24      ה. -3168  
 ו.  $\sqrt{355}$       ז.  $\sqrt{139}$       ח.  $\sqrt{124}$       ט.  $\frac{1}{\sqrt{355}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- (3) א. 9      ב. -9.5833      ג. -0.5833      ד.  $\sqrt{\frac{37}{3}}$

$$\text{ה. } \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{ו. } \frac{x^2 - 4x - 1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad \|v\| = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}}, \quad \langle u, v \rangle = \frac{b^2 - c^2}{4}$$

## אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

### שאלות

(1) הוכיחו כי אם  $u, v$  תלויים לינארית, אז  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ .

(2) יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ו-  $y_1, y_2, \dots, y_n$  מספרים ממשיים. הוכיחו כי  $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ .

(3) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות בקטע הסגור  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right) \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)$ .

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח כי  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n) \in R^n$ . שני וקטורי יחידה ב-  $R^n$ . הוכיחו כי  $|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq 1$ .

ב. נניח ש-  $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$ . הוכיחו כי  $(u_1 + \dots + u_n)^n \leq n(u_1^2 + \dots + u_n^2)$ .

(5) נניח ש-  $a_1, a_2, \dots, a_n$  מספרים חיוביים כך ש-  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . הוכיחו כי  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n}$ .

(6) הוכיחו את אי השוויון  $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \leq \sqrt{\frac{n^2 + n}{2}}$ .

(7) נתון כי  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . הוכיחו כי  $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$ .

$$(8) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$$

$$ב. \text{ נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = 1, \text{ הוכיחו כי } \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}$$

$$ב. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i}$$

(11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים  $u = (1, 2, 2)$ ,  $v = (-2, 1, 2)$  ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$ .

(12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים  $u = (3, 4)$ ,  $v = (1, 2)$  ביחס למכפלה הפנימית  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$  ב- $\mathbb{R}^2$ .

(13) מצאו את  $\cos \theta$  עבור הזווית  $\theta$  שבין  $p(x) = 2x - 1$  ו- $q(x) = x^2$  בהתייחס למכפלה הפנימית :  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$  שב- $C[0, 1]$ .

(14) מצאו את  $\cos \theta$  עבור הזווית  $\theta$  שבין  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  בהתייחס למכפלה הפנימית :  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ .

**15** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורי יחידה המקיימים  $\|u - v\| = 2$ . הוכיחו ש- $u$  ו- $v$  הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

### תשובות סופיות

- 1) שאלת הוכחה.
- 2) שאלת הוכחה.
- 3) שאלת הוכחה.
- 4) שאלת הוכחה.
- 5) שאלת הוכחה.
- 6) שאלת הוכחה.
- 7) שאלת הוכחה.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) שאלת הוכחה.
- 10) שאלת הוכחה.
- 11)  $\theta = 63.61^\circ$
- 12)  $\theta = 9.44^\circ$
- 13)  $\cos \theta = 0.173^\circ$
- 14)  $\cos \theta = 0.00036^\circ$
- 15) שאלת הוכחה.

## אורתוגונליות

## שאלות

- (1) הוכיחו כי הווקטורים  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (4, 7, -6)$  אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$ .
- (2) מצאו את ערכו של הקבוע  $k$ , עבורו הווקטורים  $u = (1, k, 3)$ ,  $v = (4, 7, -6)$  יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$ .
- (3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (2, 5, 7)$  ב- $\mathbb{R}^3$ .
- (4) הוכיחו כי הפולינומים  $p(x) = 2x - 1$ ,  $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$  אורתוגונליים בקטע  $[0, 1]$  (ביחס למכפלה הפנימית  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ ).
- (5) במרחב  $P_n[\mathbb{R}]$  (מרחב הפולינומים ממעלה  $n \geq 1$  מעל  $\mathbb{R}$ ), נגדיר מכפלה פנימית:
- $$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$
- הראו כי הפולינומים:
- $$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6), \quad q(x) = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
- אורתוגונליים כאיברי המרחב  $P_7[\mathbb{R}]$ , עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.
- (6) נתונות שתי מטריצות:  $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . בהתייחס למכפלה הפנימית:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$  ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$ , מצאו את הערך של הקבוע  $k$ , עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.
- (7) הוכיחו כי:  $\|u + v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow u \perp v$ . מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$ ?
- (8) הוכיחו כי:  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$ . מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכיחו כי :  $(u-v) \perp (u+v) \Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$ .  
 מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים  $(3, 2, 1)$  ו- $(1, -1, 2)$ ,  
 ושמרחקו מהווקטור  $(1, 1, 0)$  הוא  $\sqrt{3}$ .

11) יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.  
 נגדיר  $a = u - 2v$ ,  $b = 3u + v$ .  
 אם  $\alpha$  היא הזווית בין  $a$  ל- $b$ , אז  $\cos \alpha$  שווה ל-?

12) יהיו  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה  $k$ .  
 יהי  $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$  וקטור שמרחקו מ- $2w_2$  שווה למרחקו מ- $w_1$ .  
 מהו המרחק של  $v$  מ- $w_1$ ?

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $k = 2$ (3)  $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6)  $k = 0.5$ 

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ or } v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (11)  $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (12)  $\frac{5}{4}k$

## משלים אורתוגונלי

## שאלות

(1) יהי  $W = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 5, 3, 1)\}$ .

מצא בסיס וממד עבור  $W^\perp$ .  
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

(2) יהי  $w = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ .

מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ .  
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

(3) יהי  $W = \text{span}\{x\} \subseteq P_2[R]$ .

מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[0, 1]$ .

(4) יהי  $W = \text{span}\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$ .

מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע  $[0, 1]$ .

(5) יהי  $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2 \times 2}[R]$ .

מצאו בסיס וממד עבור  $W^\perp$ , ביחס למכפלה הפנימית  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$   
ב-  $M_{2 \times 2}[R]$ .

(6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

(7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

(8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית  $A \cdot \underline{x} = 0$ .

יהי  $U$  מרחב הפתרונות של המערכת.  
תנו פירוש אפשרי ל-  $U$  בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,  
והמושג מרחב השורות של המטריצה  $A$ .

(9) נניח ש-  $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ .

הוכיחו כי:  $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$ .

(10) נניח ש- $W$  הוא תת קבוצה של  $V$ .

הוכיחו כי:  $W \subseteq W^{\perp\perp}$ .

(11) נניח ש- $W$  הוא תת קבוצה של  $V$ .

הוכיחו כי:  $W = W^{\perp\perp}$  (אם  $V$  מממד סופי).

(12) נניח ש- $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ .

הוכיחו כי:  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ .

(13) נניח ש- $W_1, W_2$  הן תת קבוצות של  $V$ .

הוכיחו כי:  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ .

### תשובות סופיות

$$W^\perp = \text{span}\{(-3, 1, 0, 1), (11, -5, 1, 0)\} \quad (1)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad (2)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\left(-\frac{2}{3} + x\right), \left(-\frac{1}{2} + x^2\right)\right\} \quad (3)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(1.5x^2 - 6x + 5)\} \quad (4)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (5)$$

$$B_W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_{W^\perp} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (7)$$

(8) הסבר בוודא.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.