

אלגברה ליניארית

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים..... 1
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית..... 5
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה..... 9

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

- R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות ($f: R \rightarrow R$) מעל השדה R .

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות 8-15 בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

(8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W = \{A \mid A = A^T\}$.

(9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B . כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

(10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

(11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

(12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

(13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר, $W = \{A \mid AB = 0\}$.

(14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

(15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות 16-21 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

(16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

(17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

(18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 . כלומר, $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$.

(19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

(20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n , כאשר $4 \leq n \leq 7$.

(21) $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

בשאלות 22-30 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

(22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
 כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$.

(23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
 כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$.

(24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

(25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

(26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

(27) $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

(28) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(29) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(30) $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$

(31) בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי \mathbb{R} .

ב. מעל שדה המרוכבים \mathbb{C} .

(32) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. מצאו וקטור b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

- (33)** יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F .
- א. מצאו תנאי על k , עבורו הקבוצה $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(2) = k\}$, הינה תת-מרחב של V .
- ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V , שפורשים את W .

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

- | | | | | | | | | | |
|------|--------------------------|--|----|------|----|------|----|------|----|
| (1) | כן | (2) | כן | (3) | כן | (4) | לא | (5) | לא |
| (6) | כן | (7) | לא | (8) | כן | (9) | כן | (10) | לא |
| (11) | לא | (12) | כן | (13) | כן | (14) | כן | (15) | כן |
| (16) | כן | (17) | לא | (18) | כן | (19) | כן | (20) | לא |
| (21) | לא | (22) | כן | (23) | כן | (24) | כן | (25) | כן |
| (26) | כן | (27) | לא | (28) | כן | (29) | לא | (30) | כן |
| (31) | א. כן | ב. לא | | | | | | | |
| (32) | א. $u = (1, 0, 0, 0, 0)$ | ב. $B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid -b_1 + b_2 + 2b_3 \neq 0\}$ | | | | | | | |
| | ג. לא. | | | | | | | | |
| (33) | א. $k = 0$ | ב. $W = \text{span}\{2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4\}$ | | | | | | | |

צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

שאלות

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- (1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה לינארית?
- (2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?
- (5) נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?

6) הביעו את הווקטור $v = (10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v = (7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3, u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3$, $p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3$,
 $p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$

- א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

בשאלות 11-13 נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

$$\{u - v, u - w, u + v - 2w\} \quad (11)$$

$$\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\} \quad (12)$$

$$\{u + v, v + w, w\} \quad (13)$$

בשאלות 14-15 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים ליניארית ב- C^3 :

(14) מעל C .

(15) מעל R .

(16) נתבונן ב- $V = R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q . הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R , כשהוא מרחב וקטורי מעל Q .

(17) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה, שעמודותיה A_1, A_2, \dots, A_n . הוכיחו את הטענה הבאה :
 למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

(18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 4, 3, 1)\}$$

א. האם $U = W$?

ב. האם $U = V$?

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2$, $u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2$, $u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א+ב+ג. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s$, $b = 4t - 13s$, $c = 7s$, $d = 7t$.
- (6) אינסוף, $v = 2u_1 + u_2 + u_3$.
- (7) אינסוף, $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$.
- (8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$.
- ב. $A = B + 2C$, $B = A - 2C$, $C = 0.5A - 0.5B$, $D = 0.25A + 0.25B$.
- (9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$.
- ב. $p_1 = p_2 + 2p_3$, $p_2 = p_1 - 2p_3$, $p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2$, $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$.
- (10) לכל ערך של a, b, c .
- (11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (13) בלתי תלויים ליניארית.
- (14) תלויים.
- (15) בלתי תלויים ליניארית.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1), (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$

(2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

א. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x, x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,

בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \cdot 3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \cdot 1$$

1. נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

2. נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

3. נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות

מצאו בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(6) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(7) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(8) נתון $U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(9) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A = A^T\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(10) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(11) נתון $U = \{p(x) \in P_3[\mathbb{R}] \mid p(1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

(12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

(13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 15-16 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה,

וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (4) א. לא. ב. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6)\}$. ג. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$.
- (5) א. W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (6) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (7) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (9) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3.
- (10) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 0.
- (11) בסיס: $\{p_1(x) = -1 + x^3, p_2(x) = -1 + x^2, p_3(x) = -1 + x\}$, ממד: 3.
- (12) א. בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$, ממד: 2.
- ב. בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$, ממד: 3.
- (13) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2.
- (14) בסיס: $\{1 + x - x^2 + 2x^3, -3x + 3x^2 - 7x^3\}$, ממד: 2.
- (15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$, ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
- (16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$, ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.