# אלגברה לינארית

## פרק 4 - מרחבים וקטורים

### תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים ..... 1
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית ..... 5
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה ..... 9
4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים ..... 13
5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס ..... 18
6. תרגילי תיאוריה מתקדמים ..... 20

# מרחבים ותת-מרחבים

**סימון**

$R^n$ - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-$n$ מעל השדה $R$.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה $R$.

## שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $R^3$:

**1)** $W=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0\}$

**2)** $W=\{(a,b,c)\mid a=c\}$

**3)** $W=\{(a,b,c)\mid a=3b\}$

**4)** $W=\{(a,b,c)\mid a<b<c\}$

**5)** $W=\{(a,b,c)\mid a=c^2\}$

**6)** $W=\{(a,b,c)\mid c-b=b-a\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה חשבונית.

**7)** $W=\{(a,b,c)\mid b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה הנדסית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-15** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $M_n[R]$ :

**8)** $W$ מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A \mid A=A^T\}$.

**9)** $W$ מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה $B$.
כלומר, $W=\{A \mid AB=BA\}$.

**10)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A \mid |A|=0\}$.

**11)** $W$ מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A \mid A^2=A\}$.

**12)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

**13)** $W$ מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה $B$ הוא אפס.
כלומר, $W=\{A \mid AB=0\}$.

**14)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

**15)** $W$ מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $P_n[R]$ :

**16)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

**17)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

**18)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה $\geq 4$.
כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\leq 4\}$.

**19)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של $x$.

**20)** $W$ מורכב מכל הפולינומים ממעלה $n$, כאשר $4\leq n\leq 7$.

**21)** $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $F[R]$:

**22)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

**23)** $W$ מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

**24)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

**25)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

**26)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

**27)** $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

**28)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**29)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**30)** $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

**31)** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של $C^3$:
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

**32)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של $R^5$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**33)** יהי $V$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה $F$.

א. מצאו תנאי על $k$, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של $V$.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- $V$, שפורשים את $W$.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | כן | 2) | כן | 3) | כן | 4) | לא | 5) | לא |
| 6) | כן | 7) | לא | 8) | כן | 9) | כן | 10) | לא |
| 11) | לא | 12) | כן | 13) | כן | 14) | כן | 15) | כן |
| 16) | כן | 17) | לא | 18) | כן | 19) | כן | 20) | לא |
| 21) | לא | 22) | כן | 23) | כן | 24) | כן | 25) | כן |
| 26) | כן | 27) | לא | 28) | כן | 29) | לא | 30) | כן |

**31)** א. כן ב. לא

**32)** א. $u=(1,0,0,0,0)$

ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$

ג. לא.

**33)** א. $k=0$

ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

## שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

**1)** א. האם $u_1$ הוא צירוף לינארי של $u_4$?

ב. האם $u_1$ שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

**2)** א. האם $u_3$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_3$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**3)** א. האם $u_4$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_4$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**4)** נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**5)** נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$ ו- $u_3$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**7)** הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו- $u_4$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**8)** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה $A$ שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

**9)** נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום $p_2$ שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

**10)** עבור איזה ערכים של $a,b,c$, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

**11)** $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

**12)** $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

**13)** $\{u+v,v+w,w\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- $C^3$ :

**14)** מעל $\mathbb{C}$.

**15)** מעל $\mathbb{R}$.

**16)** נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה $Q$.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- $R$, כשהוא מרחב וקטורי מעל $Q$.

**17)** תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

**18)** להלן 3 תת-קבוצות של $R^4$ :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3,\ u_1 = 2u_3 + u_2$.

**3)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1,\ u_1 = 4u_4 - u_2$.

**4)** א+ב+ג. $k = -4$

**5)** $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

**6)** $v = 2u_1 + u_2 + u_3$ , אינסוף.

**7)** $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$ , אינסוף.

**8)** א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $D = 0.25A + 0.25B,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad B = A - 2C,\quad A = B + 2C$

**9)** א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2,\ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ p_2 = p_1 - 2p_3,\ p_1 = p_2 + 2p_3$

**10)** לכל ערך של $a, b, c$.

**11)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**12)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**13)** בלתי תלויים ליניארית.

**14)** תלויים.

**15)** בלתי תלויים ליניארית.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** א. כן. ב. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

## שאלות

**1)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$R^3$ :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ \ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

**2)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$M_{2x2}[R]$ :

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

**3)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$P_2(R)$ :

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ \ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

**4)** נתונה קבוצת וקטורים ב-$R^3$ : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם $T$ בסיס ל-$R^3$ ?

ב. מצאו קבוצה $T'$, שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה לינארית ב-$T$.

ג. השלימו את $T'$ לבסיס של $R^3$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית**

**5)** להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- $W$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- $U$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- $V$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- $W$, $U$ ו- $V$.

**6)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**7)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**8)** נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**9)** נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**10)** נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**11)** נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

**12)** להלן שני תתי מרחבים של המרחב $R^4$ :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.

**13)** להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$ :

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**14)** להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$ :

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

**15)**
$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

**16)**
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. $W$ - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

$U$ - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

$V$ - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ p_2(x)=-1+x^2,\ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

## שאלות

**1)** להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- $V, U, W$ את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$, $W$ ו- $V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

**2)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $R^4$:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.
ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

**3)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3,3-x+7x^2+4x^3,-5+3x-15x^2-6x^3\}$$
$$V=sp\{1-x+x^2+x^3,1+2x^2-x^3,1+x+3x^2-3x^3,5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.

**4)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3,1+2x+x^2+2x^3,-1+2x+3x^2+2x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R]\,|\,p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U\cap V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\{1+x, x+x^2, 1+x^3\}$$
$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

**6)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$$
$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$ ול- $W$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

**7)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_2[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = -A^T\} \ , \ W = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$ ול- $W$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U \oplus W = V$?

**8)** להלן שני תת-מרחבים של המרחב $V = M_3[R]$:

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\} \ , \ W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $W$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
ה. $U \oplus W = V$

**9)** יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים מממד 2 של $R^3$.
הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים שונים של $V$ ממימד 9.
א. הוכיחו כי $U+W=V$.
ב. חשבו $\dim(U\cap W)$.

**11)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים שונים של $V$ ממימד 7.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

**12)** יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים של $V$, כך ש- $\dim W=5,\ \dim U=4$ $(U\not\subseteq W)$.
מצאו את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

**13)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

**14)** יהיו $U$ ו- $W$ תת-מרחבים של $R^3$, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\,|\,a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכיחו כי $U\oplus W=R^3$.

**15)** יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי $U$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי $W$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכיחו כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי $U$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי $W$ תת-מרחב של $V$ המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכיחו כי $U\oplus W\neq V$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$ , $\dim W=2$

$B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$ , $\dim U=2$

$B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$ , $\dim V=3$

ב. $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ $\dim(U+V)=3$

ג. $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$ , $\dim(U\cap V)=2$

**2)** א. $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\-3x-y+2t=0\end{cases}$ , $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$ , $\dim U=2$

ב. $-8x-y+5z+2t=0$ , $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$ , $\dim V=3$

ג. $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$ , $\dim(U+V)=4$

ד. $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$ , $\dim(U\cap V)=1$ ה. כן. ו. לא.

**3)** א. $U+V=sp\{1+x-x^2+2x^3,2x-5x^2+x^3,x^2,x^3\}$ , $\dim(U+V)=4$

ב. $B_{U\cap V}=\{5+x+5x^2+8x^3\}$ , $\dim(U\cap V)=1$

**4)** א. $B_{U+V}=\{1+x+x^3,x+x^2+x^3,x^2+2x^3\}$ , $\dim(U+V)=3$

ב. $B_{U\cap V}=\{-1+x^2\}$ , $\dim(U\cap V)=1$

**5)** $B_{U\cap V}=\{-1+x^2,1+x^3\}$ , $\dim(U\cap V)=2$

**6)** א. $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-4\\10&-2\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U)=2$

$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-6&15\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(W)=3$

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U+W)=4$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}5&1\\5&8\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U\cap W)=1$

ד. ראו בסרטון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** א. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim W=2$ $\quad B_U=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim U=1$,

ב. $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\quad \dim(U+W)=3$

ג. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U\cap W)=0$

ד. לא. $\quad$ ה. לא.

**8)** א.

$$B_U=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim U=6$

ב.

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim W=6$

ג.

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(U+W)=9$

ד. $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ , $\dim(U\cap W)=3$

ה. לא.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** א. שאלת הוכחה. $\quad$ ב. 8

**11)** $\dim(U+W)=8,9\ or\ 10$ , $\dim(U\cap W)=4,5,6\ or\ 7$

**12)** $\dim(U\cap W)=2,3 or 4$ , $\dim(U+W)=6\ or\ 7$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

**1)** נתונים שני בסיסים של $R^3$:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ , $B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_2$ לבסיס $B_1$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$

2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$

3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

**2)** נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}$ , $B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$.

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$.

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$.

סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**3)** נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$ :

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $E$.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B$ לבסיס $E$.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

**4)** יהי $V$ מרחב וקטורי ויהי $B$ בסיס של $V$.
הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
**אם ורק אם** וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס $B$, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת"ל.
הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

## תשובות סופיות

**1)** א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

**2)** א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

**3)** א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. $(x,y,z,t)$ ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

**4)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה מתקדמים

## שאלות הוכחה

**1)** יהי $V$ מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

**2)** יהיו $u,v,w$ וקטורים, כך ש-$\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו-$u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש-$w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף $z$, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

**3)** יהי $U$ מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\ldots,u_n\}\subseteq U$ ויהי $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכיחו כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u)$.

**4)** יהי $V$ מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\ldots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\notin sp(A)$.

**5)** יהי $V$ מרחב $n$ מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $k\geq n$
ב. $A$ פורשת את $V$.
ג. $A$ בהכרח תלויה ליניארית.

**6)** יהי $V$ מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא ת"ל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3 \in V$.

נסמן: $T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3\}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $spS \subseteq spT$

ב. אם $S$ בלתי תלויה לינארית ואם $a \neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.

ג. $\dim(spT) \leq 2$

ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

**8)** יהי $V$ מרחב ותהיינה $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$, $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ קבוצות וקטורים ב-$V$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$

ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $A,B$ שתיהן בת"ל.

ג. אם $\dim V=m+k$ וגם $A,B$ שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.

ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

**9)** יהי $V$ מרחב ויהיו $U,W \subseteq V$ תמר"ים.

תהיינה $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\} \subseteq U$, שתי קבוצות בת"ל.

הוכיחו כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

**10)** יהי $V$ מרחב ויהיו $U,W$ תמר"ים שלו.

הוכיחו כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות אמריקאיות

**11)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של $A^2$ מוכל במרחב השורות של $A$.
ב. אם $AB$ משולשית עליונה, אז בהכרח $A$ משולשית עליונה או $B$ משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

**12)** נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

**13)** תהי $A$ קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. $A$ תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,
תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$.
אז מטריצה $P$ המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**15)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהיינה $A,B$ קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ-$V$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה לינארית,
אז בהכרח $A$ תלויה לינארית או $B$ תלויה לינארית.

ג. אם $A,B$ בלתי תלויות לינארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**16)** אם $W$ תת מרחב של מרחב וקטורי $V$, אז:

א. כל בסיס של $V$ מכיל בסיס כלשהו של $W$, וכל בסיס של $W$ מוכל בבסיס כלשהו של $V$.

ב. כל בסיס של $V$ מכיל בסיס כלשהו של $W$, אבל לא כל בסיס של $W$ מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של $V$.

ג. לא כל בסיס של $V$ מכיל בהכרח בסיס כלשהו של $W$, אבל כל בסיס של $W$ מוכל בבסיס כלשהו של $V$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** יהיו $U,W$ שני תתי-מרחבים של מרחב $V$,
כך ש-$\dim V = n,\ \dim U = \dim W = n-1$.
אז:

א. $n-2 \le \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \ne W$, ייתכן ש-$U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש-$V = U + sp\{v\}$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + sp\{v\} = V$ ו-$U \cap sp\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

**18)** נניח כי $v_1, v_2, v_3, v_4$ הם וקטורים במרחב ליניארי $V$.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\}$ והווקטורים $v_1, v_2, v_3, v_4$ שונים זה מזה,
אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו-$v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם $v_1, v_2$ בת"ל וגם $v_3, v_4$ בת"ל, וכן $Span\{v_1, v_2\} \cap Span\{v_3, v_4\} = \{\underline{0}\}$,
אז $v_1, v_2, v_3, v_4$ הם בת"ל.

**19)** אם $V,W$ תת מרחבים של מרחב וקטורי $U$, ומתקיים:
$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$,
אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

**20)** $V,W$ תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של $W$ ו-$\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של $V$, אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V+W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** אם $A$ מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של $A^t$ שווה למרחב השורות של $A$.

ב. מרחב השורות של $A^t$ שונה ממרחב השורות של $A$.

ג. ממד מרחב השורות של $A^t$ שווה לממד מרחב השורות של $A$.

ד. ממד מרחב השורות של $A^t$ שונה מממד מרחב השורות של $A$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**22)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של $AB$ מוכל במרחב השורות של $A$.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם $AB$ משולשית עליונה, אז בהכרח $A$ משולשית עליונה או $B$ משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**23)** תהי $A$ קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש-$\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש-$A$ מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. $A$ בלתי תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**24)** יהי $a$ מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\}, W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$

שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי $a$.

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי $a$.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm 1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm 1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**25)** נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2&5&5\\-1&-1&0\\2&4&3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&9\\2&4&6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ rank(R)=2$

ב. $rank(R^3T^5)=1$

ג. מרחב השורות של $R^3T^5$ שווה למרחב השורות של $T^5$.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**26)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- $V$ $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $A$ בלתי תלויה לינארית, אז $A$ פורשת את $V$.

ב. אם $A$ קבוצה פורשת ל- $V$, אז $A$ בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם $A$ פורשת את $V$, אך $A$ תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם $A$ בלתי תלויה לינארית, אך $A$ אינה פורשת את $V$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**27)** יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$, ותהיינה $A,B$ קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- $V$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A,B$ תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם $A,B$ בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**28)** וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$, ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,x+1,x^3+x^2,2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**29)** תהי $A$ מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

א. אם שורות $A$ בת"ל, אזי עמודות $A$ בת"ל.

ב. אם שורות $A$ בת"ל ועמודות $A$ בת"ל, אזי בהכרח $A$ מטריצה ריבועית.

ג. אם שורות $A$ בת"ל ועמודות $A$ בת"ל, אזי בהכרח $A$ מטריצה הפיכה.

ד. אם שורות $A$ בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**30)** נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \middle| a+b+c=d\right\}$$

$$W=sp\left\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\right\}$$

א. מצאו בסיס וממד עבור $U$, $W$, $U\cap W$.

ב. עבור תת מרחבים $K,L$ של מרחב וקטורי $V$, הגדירו את $K+L$.

**31)** $A$ מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.

א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ ללא פתרון.

ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^ty=c$ עם יותר מפתרון אחד.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**32)** נתונות מטריצות ממשיות $A$ מסדר $2\times4$ ו-$B$ מסדר $4\times4$, כך ש- $rank(A)=2,\quad rank(B)=3$.

הוכיחו כי $AB\neq0$.

**33)** $A$ מטריצה $3\times3$, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq0$, אז הדרגה של $A$ יכולה להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

**34)** תהיינה $A$ מטריצה מסדר $3\times5$ ו-$B$ מטריצה $5\times3$ אז:

א. $AB$ הפיכה אם ורק אם $BA$ הפיכה.

ב. $AB$ בהכרח לא הפיכה.

ג. $BA$ בהכרח הפיכה.

ד. אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B)\leq5$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** אם $A$ מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד, אז בהכרח:

א. $A$ הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A^t$ פתרון יחיד.

ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד.

ד. מרחב העמודות של $A$ שונה ממרחב הפתרונות של $A$.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **11)** | א | **12)** | ב | **13)** | א | **14)** | ד |
| **15)** | א+ד | **16)** | ג | **17)** | א+ג | **18)** | הוכחה. |
| **19)** | ג+ד | **20)** | ב | **21)** | ב+ג | **22)** | ד |
| **23)** | ה | **24)** | ב+ד | **25)** | ב+ג | **26)** | א+ב |
| **27)** | א | **28)** | ג | **29)** | ג | | |

**30)**

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\quad \dim W=3,\quad \dim(U\cap W)=2$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **31)** | ד | **32)** | הוכחה. | **33)** | ב | | |
| **34)** | ד | **35)** | ד | | | | |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©