# סטטיסטיקה והסתברות

## פרק 40 - מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו

### תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי ( פירסון) ..... 1

# מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

## מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- $Y$ הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- $X$ הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- $X$ ושיעור ה- $Y$ שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| מספר חדרים בדירה | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מספר הנפשות בדירה | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**1)** כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

**2)** כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

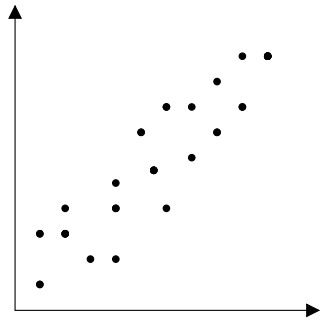
**3)** שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

**4)** מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

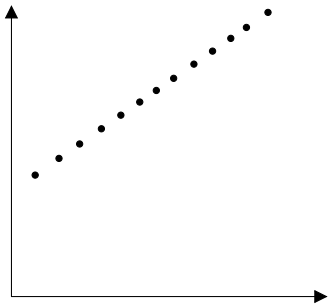

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

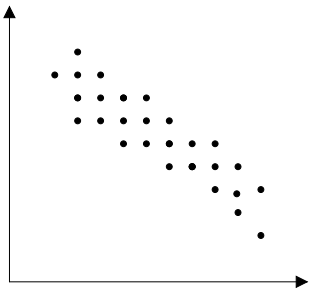
**קשר לנארי חיובי חלקי**



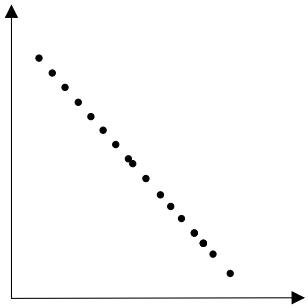
**קשר לנארי חיובי מלא**



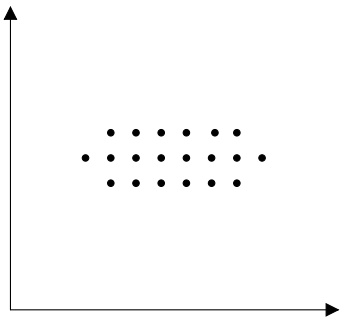
**קשר לינארי שלילי חלקי**



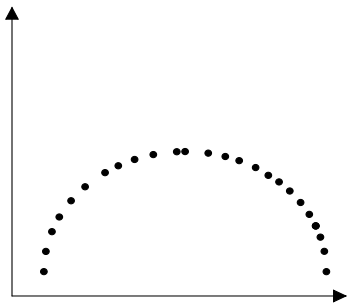
**קשר לינארי שלילי מלא**



**אין קשר**



**אין קשר לינארי**



**משמעות מקדם המתאם:**

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

1 0 -1


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

**מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):**

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ שלילי.

**מתאם חיובי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: $\rho$ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

$r$ - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר $\rho$.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את $X$ ב- $Y$ התוצאה תהיה זהה.

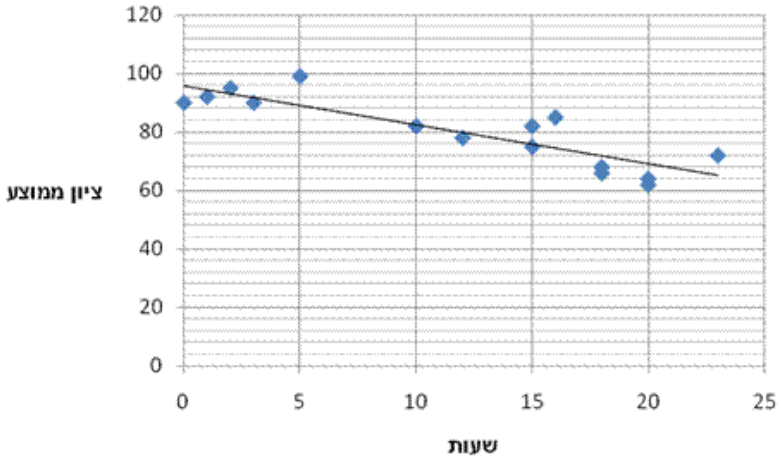
**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:




א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

**2)** להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | ? | -0.7 | ? |
| לשון | ? | ? | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | ? | ? |

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

**3)** במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

| שעות תרגול | ציון סופי |
|---|---|
| 20 | 90 |
| 25 | 90 |
| 30 | 95 |
| 15 | 60 |
| 30 | 90 |
| 20 | 85 |
| 10 | 50 |

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

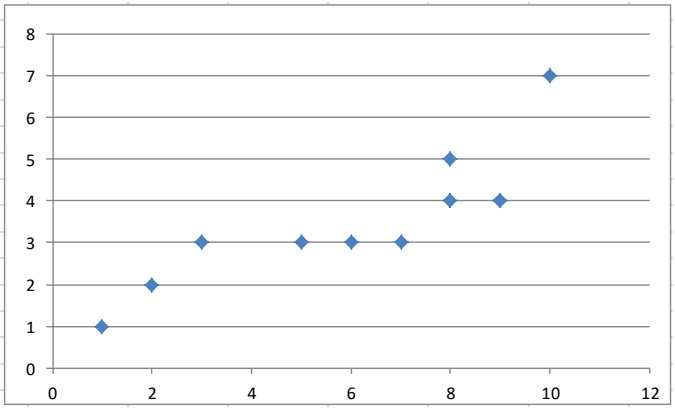

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

**5)** להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:




א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- $X$ שלה הוא 4 וערך ה- $Y$ שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

**שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):**

**6)** חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

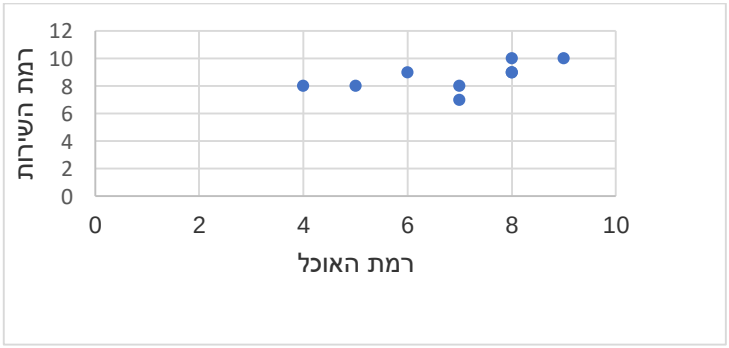
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

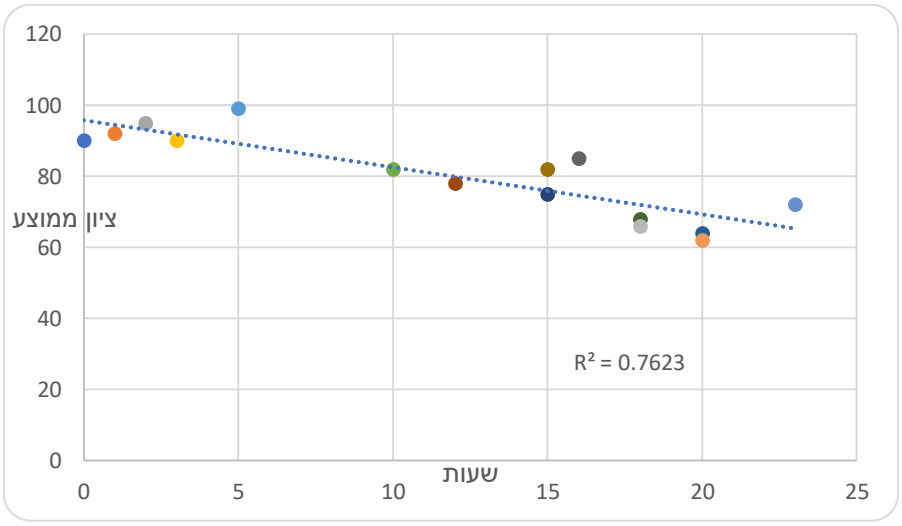
**7)** בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.




מה יהיה ערכו של מקדם המתאם ($r$)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

**8)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

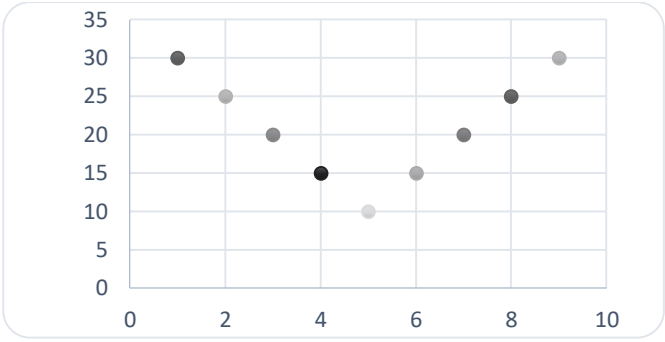



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



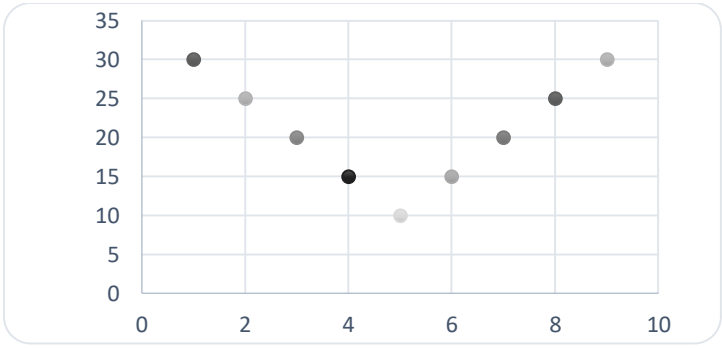

א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

**10)** התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.




איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

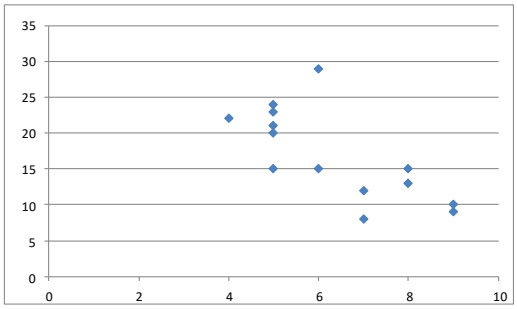
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:




$X$ - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- $Y$ (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

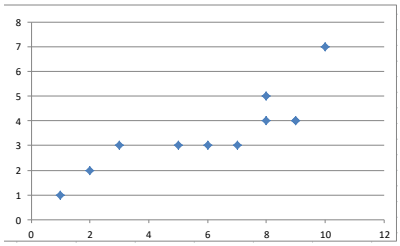
**11)** לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של $r$?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

**12)** אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

**13)** להלן דיאגרמת פיזור:




מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

**14)** בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**15)** לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

**16)** מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

| | | |
|---|---|---|
| | | 159 |
| | | 170 |
| | | 180 |
| | | 185 |
| | | 204 |
| | | 224 |
| | | 236 |
| | | 212 |
| | | 168 |
| | | 189 |
| | | 195 |
| | | 163 |
| | | 187 |
| | | 206 |
| | | 201 |
| | | 223 |
| | | 242 |
| | | 203 |
| | | 205 |
| 197.47 | AVERAGE | |
| 536.25 | VARPA | |

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

**17)** מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

**18)** אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**19)** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין $X$ – ציון בבגרות בלשון ל $Y$ – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

**20)** עבור סדרה של תצפיות מדדו את $X$ ואת $Y$. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של $Y$ ירד הערך של $X$ בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. שעות בילוי. ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

**2)** א. להלן טבלה :

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | 1 | -0.7 | 0.1 |
| לשון | -0.7 | 1 | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | 0.6 | 1 |

**3)** א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון. ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי. ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

**4)** א. לעלות. ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

**5)** א. חלקי, חיובי. ב. קטן.

**6)** ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

**11)** ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

**16)** א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל