

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 5 - מציאת התפלגות מטען- מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

1. מציאת התפלגות מטען 1

מציאת התפלגות מטען:

רקע:

צפיפות נפחית:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של חוק גאוס)

צפיפות משטחית:

$$\sigma = \epsilon_0 \Delta E_{\perp}$$

מטען נקודתי: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \hat{r}$ (בקורדינטות כדוריות) באזור הכולל את הראשית אז יש מטען נקודתי כך ש $q = \frac{\alpha}{k}$.

צפיפות מטען אורכית: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r} \hat{r}$ (בקורדינטות גליליות) באזור הכולל את הראשית אז יש צפיפות מטען אורכית כך ש $\lambda = 2\pi\epsilon_0\alpha$.

מציאת שדה מהפוטנציאל:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של פוטנציאל)

| כדוריות | גליליות | קרטזיות | |
|--|---|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{z}$ | $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$ | $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$ | grad $\vec{\nabla} f$ |
| $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_{\varphi} \sin \varphi)$ | $\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ | $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ | div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ |
| $\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta} \sin \varphi) - \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_{\varphi}) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_{\theta}) \right) \hat{\varphi}$ | $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$ | $\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y}$ $+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$ | Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |

(הטבלה הופיעה גם בפרק המבוא המתמטי)

שאלות:

- (1) **מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית**
נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r) = \begin{cases} Ar^2, & r < a \\ B \ln(r) + C, & a < r < b \\ D \ln(r), & b < r \end{cases}$$

A, B, C, D נתונים.

- א. מצאו קשר בין הקבועים.
 ב. מצאו את התפלגות המטען במרחב.
 ג. כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c > b$. מצאו את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

(2) **שדה התלוי בזווית**

השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E} = \frac{C}{r} (\hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\phi})$$

- א. מצאו את צפיפות המטען במרחב.
 ב. מצאו את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על צפיפות המטען.
 ג. מצאו שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

(3) **התפלגות בכדוריות**

השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{72\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m}{C})}{r} \hat{r}, & r < 1 \\ -\frac{144\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m^2}{C})}{r^2} \hat{r}, & r > 1 \end{cases}$$

הקואורדינטות כדוריות.
 מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 c}{r^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} + \frac{\sin \theta \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\sigma(r=1) = -2 \cdot 10^{-4} \frac{c}{m^2}, \quad \rho(r) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{c}{m} \right) & r < 1 \\ 0 & 1 < r \end{cases} \quad (3)$$

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.