# פיזיקה 2 חשמל

## פרק 7 - מציאת התפלגות מטען

### תוכן העניינים

1. מציאת התפלגות מטען ..... 1
2. משוואת פואסון ולפלס ..... 4

# מציאת התפלגות מטען:

## רקע:

<u>צפיפות נפחית</u>:

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של חוק גאוס)

<u>צפיפות משטחית</u>:

$$\sigma = \varepsilon_0 \Delta E_{\perp}$$

<u>מטען נקודתי</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ (בקורדינטות **כדוריות**) באזור הכולל את הראשית אז יש מטען נקודתי כך ש $q = \frac{\alpha}{\mathrm{k}}$ .

<u>צפיפות מטען אורכית</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\hat{r}$ (בקורדינטות **גליליות**) באזור הכולל את הראשית אז יש צפיפות מטען אורכית כך ש $\lambda = 2\pi\varepsilon_0\alpha$ .

<u>מציאת שדה מהפוטנציאל</u>:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של פוטנציאל)

| | קרטזיות | גליליות | כדוריות |
|---|---|---|---|
| grad $\vec{\nabla} f$ | $\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$ | $\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$ | $\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{rsin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{z}$ |
| div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ | $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\,\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,sin\,\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi \sin\varphi)$ |
| Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ | $\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$ | $\frac{1}{r\,sin\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta\, sin\,\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$ |

(הטבלה הופיע גם בפרק המבוא המתמטי)

## שאלות:

**1) מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית**

נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r)=\begin{cases}Ar^2, & r<a\\ B\,ln(r)+C, & a<r<b\\ D\,ln(r), & b<r\end{cases}$$

A , B , C , D נתונים.

א. מצאו קשר בין הקבועים.

ב. מצאו את התפלגות המטען במרחב.

ג. כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c>b$. מצאו את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

**2) שדה התלוי בזווית**

השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E}=\frac{C}{r}\left(\hat{r}+\cos\theta\,\hat{\theta}+\sin\theta\cos\varphi\hat{\varphi}\right)$$

א. מצאו את צפיפות המטען במרחב.

ב. מצאו את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על צפיפות המטען.

ג. מצאו שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

**3) התפלגות בכדוריות**

השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$:\vec{E}(r)=\begin{cases}-\frac{72\pi\cdot10^5\left(N\cdot\frac{m}{C}\right)}{r}\hat{r}, & r<1\\ -\frac{144\pi\cdot10^5\left(N\cdot\frac{m^2}{C}\right)}{r^2}\hat{r}, & r>1\end{cases}$$

הקואורדינטות כדוריות.

מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

## תשובות סופיות:

**1)** ראה סרטון.

**2)** א. $\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\varepsilon_0 c}{r^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}+\frac{\sin\theta\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right)$ ב. $4\pi\varepsilon_0 cR$ ג. $4\pi\varepsilon_0 cR$.

**3)** $\rho(r)=\begin{cases}-\dfrac{2\cdot 10^{-4}\left(\frac{c}{m}\right)}{r^2} & r<1\\ 0 & 1<r\end{cases}$ , $\sigma(r=1)=-2\cdot 10^{-4}\frac{c}{m^2}$.

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.

# משוואת פואסון ולפלס:

## סיכום כללי:

משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

משוואת לפלס:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית $f$ כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר $\varphi$ היא הזווית עם ציר $z$ לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב-$\Delta f$.

## שאלות:

**1) דוגמה – שתי קליפות**

נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים $a$ ו-$b$ $(a<b)$.
נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל $V$.

א. רשמו את משוואת לפלס לכל תחום.

ב. פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.

ג. מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

## תשובות:

**1)** א. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$.

ב. $\varphi r=\begin{cases}0 & r<a\\ -\frac{abV}{r(b-a)}+\frac{bV}{b-a} & a<r<b\\ \frac{bV}{r} & b<r\end{cases}$.

ג. $\sigma(a)=\frac{-\varepsilon_0 bV}{a(b-a)}$.