פיזיקה לתעופה מתקדם 18511022

פרק 6 - מציאת התפלגות מטען

תוכן העניינים

מציאת התפלגות מטען:

רקע:

<u>צפיפות נפחית</u>:

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של חוק גאוס)

<u>צפיפות משטחית</u>:

$$\sigma = \varepsilon_0 \Delta E_\perp$$

<u>מטען נקודתי</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ (בקורדינטות **כדוריות**) באזור הכולל את הראשית אז יש מטען נקודתי כך ש $q = \frac{\alpha}{\mathrm{k}}$.

<u>צפיפות מטען אורכית</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\hat{r}$ (בקורדינטות **גליליות**) באזור הכולל את הראשית אז יש צפיפות מטען אורכית כך ש $\lambda = 2\pi\varepsilon_0\alpha$.

<u>מציאת שדה מהפוטנציאל</u>:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של פוטנציאל)

	קרטזיות	גליליות	כדוריות
grad $\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{z}$
div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi \sin\varphi)$
Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$

(הטבלה הופיע גם בפרק המבוא המתמטי)

שאלות:

1) מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית

נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r)=\begin{cases}Ar^2, & r<a\\ B\ln(r)+C, & a<r<b\\ D\ln(r), & b<r\end{cases}$$

A , B , C , D נתונים.

א. מצאו קשר בין הקבועים.

ב. מצאו את התפלגות המטען במרחב.

ג. כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c>b$. מצאו את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

2) שדה התלוי בזווית

השדה החשמלי במרחב נתון ע״י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E}=\frac{C}{r}\left(\hat{r}+\cos\theta\,\hat{\theta}+\sin\theta\cos\varphi\hat{\varphi}\right)$$

א. מצאו את צפיפות המטען במרחב.

ב. מצאו את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע״י אינטגרל על צפיפות המטען.

ג. מצאו שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע״י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

3) התפלגות בכדוריות

השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}-\frac{72\pi\cdot10^5\left(N\cdot\frac{m}{C}\right)}{r}\hat{r}, & r<1\\ -\frac{144\pi\cdot10^5\left(N\cdot\frac{m^2}{C}\right)}{r^2}\hat{r}, & r>1\end{cases}:$$

הקואורדינטות כדוריות.

מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון.

2) א. $\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\varepsilon_0 c}{r^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}+\frac{\sin\theta\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right)$ ב. $4\pi\varepsilon_0 cR$ ג. $4\pi\varepsilon_0 cR$.

3) $\rho(r)=\begin{cases}-\dfrac{2\cdot10^{-4}\left(\frac{c}{m}\right)}{r^2} & r<1\\ 0 & 1<r\end{cases}$, $\sigma(r=1)=-2\cdot10^{-4}\frac{c}{m^2}$.

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.

משוואת פואסון ולפלס:

סיכום כללי:

משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

משוואת לפלס:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית f כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

כאשר φ היא הזווית עם ציר z לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב-Δf.

שאלות:

1) דוגמה – שתי קליפות

נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים a ו-b $(a<b)$.
נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל V.

א. רשמו את משוואת לפלס לכל תחום.

ב. פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.

ג. מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

תשובות:

1) א. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$.

ב. $\varphi r=\begin{cases}0 & r<a\\ -\frac{abV}{r(b-a)}+\frac{bV}{b-a} & a<r<b\\ \frac{bV}{r} & b<r\end{cases}$.

ג. $\sigma(a)=\frac{-\varepsilon_0 bV}{a(b-a)}$.