

# פיזיקה 2 ממ

פרק 6 - מציאת התפלגות מטען ומשוואת לפלאס

תוכן העניינים

1. מציאת התפלגות מטען ..... 1
2. משוואת פואסון ולפלאס ..... 4

## מציאת התפלגות מטען:

**רקע:**

צפיפות נפחית:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של חוק גאוס)

צפיפות משטחית:

$$\sigma = \epsilon_0 \Delta E_{\perp}$$

מטען נקודתי: אם יש שדה מהצורה  $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \hat{r}$  (בקורדינטות כדוריות) באזור הכולל את הראשית אז יש מטען נקודתי כך ש  $q = \frac{\alpha}{k}$ .

צפיפות מטען אורכית: אם יש שדה מהצורה  $\vec{E} = \frac{\alpha}{r} \hat{r}$  (בקורדינטות גליליות) באזור הכולל את הראשית אז יש צפיפות מטען אורכית כך ש  $\lambda = 2\pi\epsilon_0\alpha$ .

מציאת שדה מהפוטנציאל:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של פוטנציאל)

| כדוריות  | גליליות   | קרטזיות   |   |
|--|---|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{z}$   | $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$   | $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$   | grad<br>$\vec{\nabla} f$                  |
| $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_{\varphi} \sin \varphi)$  | $\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$  | $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$   | div<br>$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$       |
| $\frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta} \sin \varphi) - \frac{\partial F_{\varphi}}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\varphi}) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta}$<br>$+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_{\theta}) \right) \hat{\varphi}$ | $\left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}$<br>$+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$ | $\left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y}$<br>$+ \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$ | Rot/curl<br>$\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |

(הטבלה הופיעה גם בפרק המבוא המתמטי)

**שאלות:**

- (1) מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית**  
נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r) = \begin{cases} Ar^2, & r < a \\ B \ln(r) + C, & a < r < b \\ D \ln(r), & b < r \end{cases}$$

A, B, C, D נתונים.

- א. מצאו קשר בין הקבועים.  
 ב. מצאו את התפלגות המטען במרחב.  
 ג. כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס  $c > b$ . מצאו את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

**(2) שדה התלוי בזווית**

השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E} = \frac{C}{r} (\hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\phi})$$

- א. מצאו את צפיפות המטען במרחב.  
 ב. מצאו את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על צפיפות המטען.  
 ג. מצאו שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

**(3) התפלגות בכדוריות**

השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{72\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m}{C})}{r} \hat{r}, & r < 1 \\ -\frac{144\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m^2}{C})}{r^2} \hat{r}, & r > 1 \end{cases}$$

הקואורדינטות כדוריות.  
 מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

### תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 c}{r^2} \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} + \frac{\sin \theta \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right) \text{ א.} \quad (2)$$

ג.  $4\pi\epsilon_0 cR$

ב.  $4\pi\epsilon_0 cR$

$$\sigma(r=1) = -2 \cdot 10^{-4} \frac{c}{m^2}, \quad \rho(r) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4} \left( \frac{c}{m} \right) & r < 1 \\ 0 & 1 < r \end{cases} \quad (3)$$

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.

## משוואת פואסון ולפלס:

**סיכום כללי:**

משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

משוואת לפלס:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית  $f$  כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר  $\varphi$  היא הזווית עם ציר  $z$  לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב- $\Delta f$ .

**שאלות:**

### (1) דוגמה – שתי קליפות

- נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים  $a$  ו- $b$  ( $a < b$ ). נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל  $V$ .
- רשמו את משוואת לפלס לכל תחום.
  - פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.
  - מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

## תשובות:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\frac{abV}{r(b-a)} + \frac{bV}{b-a} & a < r < b \\ \frac{bV}{r} & b < r \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(a) = \frac{-\varepsilon_0 bV}{a(b-a)} \quad \text{ג.}$$