

שיטות באנליזה מתמטית

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים.....1
2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון.....3
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים.....5
4. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה.....7

חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x = 0, x = 1, x = 2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x = 6, x = 2, x = -4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x = 1, x = 3, x = -2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x = 1, x = 4, x = -1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x = -1, x = 3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1+i, 2), v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x = 1, x = 1 + \sqrt{3}i, x = 1 - \sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1),$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2) \quad (8)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2 :

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ , כך ש- } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

הוכיחו כי $z(t) = y(t)$.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5 :

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ , כך ש- } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0 \quad \text{חשבו :}$$

$$(7) \quad \begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתרו את מערכת המשוואות:}$$

$$(8) \quad \text{פתרו: } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t), \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

הערה: בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad z(t) = y(t)$$

$$(4) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad 0$$

$$(7) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(8) \quad \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות 1-4 :

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{cases} \\ (2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' = 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{cases} \quad (a \text{ קבוע}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{cases} x' = x + y + 2z + e^t \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 2x + y + z + e^t \end{cases} \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (4) \end{aligned}$$

(5) המירו את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$, במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a = -1 \text{ נקבל:} \quad (2)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a \neq 1 \text{ נקבל:}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} te^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת ההצבה

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$. z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \text{ , בהינתן } \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$