# פונקציות מרוכבות

## פרק 1 - מספרים מרוכבים

### תוכן העניינים


1. הגדרת המספר המרוכב ..... 1
2. המספר הצמוד ..... 4
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת ..... 7
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב ..... 8
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב ..... 12
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים ..... 14
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים ..... 15

# הגדרת המספר המרוכב:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי $a$ וחלק מדומה $b$. המספרים $a$ ו- $b$ הם ממשיים.

$a$ נקרא הרכיב הממשי של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

$b$ נקרא הרכיב המדומה של $z$ ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

## שאלות:

**1)** רשום עם $i$:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

**2)** חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

**3)** רשום את ערכם של $a$ ו- $b$ בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**4)** כתוב מספר מרוכב $z$ לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\ ,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**5)** מספר מרוכב מסוים $z$ מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את $z$.

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

**7)** פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

**8)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

**9)** נתון: $z_2=5-2i$ , $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

**10)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

**11)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

**12)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$ .

ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין $a_1$ ל- $a_2$ וקשר בין $b_1$ ו- $b_2$.

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $i$ ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

**2)** א. $i$ ב. $-1$ ג. $-i$ ד. $1$ ה. $i$ ו. $i$.

**3)** א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$

ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

**4)** א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**5)** $z=1.5+2.5i$.

**6)** א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

**7)** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**8)** $z=2i\ ,\ -3i$.

**9)** א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

**10)** א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

**11)** א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. $-25$ ד. $-1-i$

ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

**12)** א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

# המספר הצמוד:

## סיכום כללי:

**צמוד קומפלקסי (מרוכב):**

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

## שאלות:

**13)** רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. $-4$ ו. $0$

**14)** חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

**15)** נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

**16)** המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את $a$.

**17)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

**18)** פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

**19)** פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

**20)** פתור את מערכת המשוואות הבאה ($z$ ו-$w$ משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

**21)** פתור את המשוואות הבאות שבהן $a$ ו-$b$ ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

**22)** פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

**23)** חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

**24)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

**25)** פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

**26)** פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

## תשובות סופיות:

**13)** א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. $-4$ ו. $0$.

**14)** א. $4+3i$ ב. $-1+i$. ג. $5+3i$.

**15)** א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

**16)** $a=-\frac{3}{4}$.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $z=4-i$.

**19)** $z=4+5i$.

**20)** $w=5+i$ , $z=2-3i$.

**21)** א. $a=5$ , $b=-3$ ב. $a=2$ , $b=-1$.

**22)** $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

**23)** א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

**24)** א. $z_{1,2}=i$ , $1$ ב. $z_{1,2}=-2-i$ , $2-5i$.

**25)** $z_1=-2-5i$ , $z_2=3i$.

**26)** $z_1=-3i$ , $z_2=2i$.

# חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

## שאלות:

**27)** נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב $m$ למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

## תשובות סופיות:

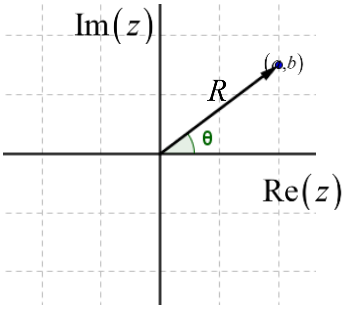
**27)** א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

# מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב $z$ ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-$x$ מייצג את $a$, גודל הערך הממשי של $z$, וציר ה-$y$ מייצג את $b$, גודל הערך המדומה של $z$.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.




במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: $(a,b)$

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: $(R,\theta)$. מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$ , $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$ , $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב $z$ יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

## שאלות:

**28)** כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

**29)** הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. $4$ ח. $-1$ ט. $1$

י. $0$

**30)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

**31)** נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות $R$ ו-$\theta$ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. $iz$ ו. $z\cdot\overline{z}$

**32)** הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

**33)** הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

**34)** הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

**35)** מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

**36)** ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

**37)** משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**38)** משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

**39)** $z$ הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z\cdot\overline{z}$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

**29)** א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

**30)** א. $-6$ ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

**31)** א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. $R^2$.

**32)** שאלת הוכחה.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** שאלת הוכחה.

**35)** $1-i$ , $1-i$ , $-1+i$ , $1+i$.

**36)** $\sqrt{3}-i$ , $-1-\sqrt{3}i$ , $-\sqrt{3}+i$.

**37)** $-2$ , $1-\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**38)** $2$ , $-1+\sqrt{3}i$ , $1+\sqrt{3}i$.

**39)** א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

# נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

## סיכום כללי:

**משפט דה-מואבר:**

כדי להעלות מספר מרוכב $z$ בחזקת $n$ נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

**שורשים של מספר מרוכב:**

כדי להוציא שורש $n$-י של מספר מרוכב $z$ השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$ : $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

## שאלות:

**40)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

**41)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**42)** מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

**43)** נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

**44)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ .
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z-3i|=5$ .

**45)** נתון המספר המרוכב $z=x+iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס
המתקבל בעבור המשוואה : $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$ .

## תשובות סופיות:

**40)** א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. 4- ד. $-8i$ ה. 1.

**41)** א. $z_0=6\text{cis}60°$ , $z_1=6\text{cis}240°$ .

ב. $z_0=3\text{cis}40°$ , $z_1=3\text{cis}130°$ , $z_2=3\text{cis}220°$ , $z_3=3\text{cis}310°$ .

ג. $z_0=\text{cis}12°$ , $z_1=\text{cis}84°$ , $z_2=\text{cis}156°$ , $z_3=\text{cis}228°$ , $z_4=\text{cis}300°$ .

**42)** סכום : 0 , מכפלה : 1- .

**43)** $x^2+y^2=4$ .

**44)** $x^2+(y-3)^2=25$ .

**45)** $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$ .

# שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**46)** בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

**47)** בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

**48)** נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות:

**46)** $S_{10} = 100-15i$.

**47)** א. $a_1 = 2+i$ , $q = -2i$ ב. $S_5 = 20+25i$.

**48)** $-2$ , $2i$ , $2$ או $6-8i$ , $4-2i$ , $2$.

# שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

## שאלות:

**49)** פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

**50)** פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

**51)** פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

**52)** הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

**53)** נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

**54)** נתון מספר מרוכב $z$, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז $z$ על מעגל היחידה.

**55)** הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

**56)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

**57)** $z$ הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

**58)** $z_1$ ו- $z_2$ הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות $\theta$ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

## תשובות סופיות:

**49)** $z_1=3-4i$ , $z_2=-3-4i$.

**50)** $x=2$ , $-1$.

**51)** $z_1=0$ , $z_2=i$ , $z_3=-i$ , $z_4=1$ , $z_5=-1$.

**52)** שאלת הוכחה.

**53)** שאלת הוכחה.

**54)** שאלת הוכחה.

**55)** שאלת הוכחה.

**56)** $\arg(z)=30°$.

**57)** $z+iz=\sqrt{2}$ , $-\sqrt{2}$.

**58)** $2\theta$.