מכינה במתמטיקה

פרק 53 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה ליניארית

שאלות

בשאלות **1-4** נתון $v=(5+i,2-3i,7+2i)$, $u=(3-2i,4i,1+6i)$.
מצאו:

1) א. $4u+v$ ב. $2i\cdot u-v$ **2)** $u\cdot v$

3) א. $u\cdot u$ ב. $|u|$

4) $|v|$

בשאלות **5-6** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

מעל **השדה** $\mathbf{F}$:
$$z_1+iz_2+(1-i)z_3=1+4i$$
$$iz_1+z_2+(1+i)z_3=2+i$$
$$(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3=5-i$$
, כאשר:

5) $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

6) $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

בשאלות **7-8** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות **9-10** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

9) מעל $\mathbb{C}$.

10) מעל $\mathbb{R}$.

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

11) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

13) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

1) א. $(17-7i,2+13i,11+26i)$ ב. $(-1+5i,-10+3i,-19)$

2) א. $20+35i$ ב. 66

3) $\sqrt{66}$

4) $\sqrt{92}$

5) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

6) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

7) כן

8) לא

9) תלויים.

10) בלתי תלויים.

11) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.
מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1+2i & 0\\ 1 & 1-2i\end{bmatrix}$$

12) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

13) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i},1+\sqrt{3i},-2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i},1-\sqrt{3i},-2\right)$$