# אלגברה לינארית

## פרק 11 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

### תוכן העניינים


1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות ..... 1
2. הצמוד המרוכב ..... 3
3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית ..... 6
4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב ..... 8
5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים ..... 10
6. חילוק פולינומים ..... 13
7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה ..... 14
8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית ..... 15

# מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

## שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את המשוואות ומצאו את $z$ :

**1)** $z^2+9=0$ **2)** $z^2-4z+5=0$ **3)** $z^2-6z+13=0$

בשאלות **4-7** חשבו :

**4)** $(i\sqrt{2})^6$ **5)** $(i^5-i^{13})^2$

**6)** $(4+i)-(2+10i)$ **7)** $(-4-i)(2-3i)$

**8)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$ .
ידוע כי $z_1+z_2$ ממשי וכי $z_1-z_2$ מדומה.
א. מצאו קשר בין $a_1$ ל- $a_2$ ובין $z_1$ ל- $z_2$ .
ב. הראו כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

**9)** יהיו $z_1,z_2,...,z_n$ מספרים מרוכבים.
א. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
ב. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|$
ג. הוכיחו כי $|z_1^{\,n}|=|z_1|^n$

**10)** יהי $z$ מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $z^{11}=1$ אז $z+\frac{1}{z}$ מספר ממשי.

**11)** יהי $z$ מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $|z+1|=|z-1|$ אז $iz$ מספר ממשי.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\pm 3i$
2) $2 \pm i$
3) $3 \pm 2i$
4) $-8$
5) $0$
6) $2-9i$
7) $-11+10i$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצמוד המרוכב

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

**1)** $\frac{5}{2+i}$ **2)** $\frac{1+i}{1-3i}$ **3)** $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

פתרו את המשוואות בשאלות **4-6** ומצאו את המספר המרוכב $z$:

**4)** $2z-6i=\bar{z}-1$ **5)** $z\bar{z}-\overline{5z}=10i$ **6)** $(1+i)z^2+2z-i+1=0$

**7)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר $z$ ו-$w$ משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$$

**8)** חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

**9)** פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$

בשאלות **10-11** פתרו את המשוואות:

**10)** $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$

**11)** $z^2-i\bar{z}+6=0$

**12)** הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{\bar{z}}{z^2}-\frac{z}{\bar{z}^2}$ כאשר $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z-i|=1$.

הוכח:

א. $|z|^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)$

ב. $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

**14)** המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.

מצאו את $a$.

**15)** נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $2-i$

2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

3) $-\frac{1}{2}+i$

4) $z=-1+2i$

5) $z=1+2i, z=4+2i$

6) $z=i, z=-1$

7) $z=2-3i,\ \ w=5+i$

8) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$

9) א. $z_{1,2}=i, 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i,\ \ 2-5i$

10) $z_1=-2-5i,\ \ z_2=3i$

11) $z_1-3i,\ z_2=2i$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $a=-\frac{3}{4}$

15) שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

## שאלות

כתבו את המספרים בשאלות **1-8** בצורה קוטבית:

**1)** $1+\sqrt{3}i$ **2)** $-1-i$ **3)** $-3-\sqrt{3}i$ **4)** $1-i$

**5)** $1+i$ **6)** $\sqrt{3}-i$ **7)** $\sqrt{3}i$ **8)** $-8$

**9)** נתון המספר המרוכב $z=Rcis\theta$.
הביעו באמצעות $R$ ו-$\theta$ את המספרים:

א. $\overline{z}$

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$

ה. $iz$

ו. $z\cdot\overline{z}$

**10)** הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$

ב. $z\cdot\overline{z}$

ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

**11)** הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$

ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

**12)** הוכיחו:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$

ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3) $\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

7) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

9) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$

ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90^\circ+\theta\right)$ ו. $R^2$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

# נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

## שאלות

בשאלות **1-6** חשבו:

**1)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ **2)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

**4)** $\sqrt[6]{-8}$ **5)** $\sqrt[5]{1}$ **6)** $\sqrt[3]{-8}$

**7)** בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

**8)** בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי: $\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{32}i$

2) $-2^9$

3) $-1$

4) $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$

5) $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4$

6) $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right) \quad k=0,1,2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגול נוסף במספרים מרוכבים

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראו כי אם $z$ הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

**2)** נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

**3)** פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא $i$.

ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $z^5=-16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$, כאשר $q$ מנת הסדרה.

**6)** נתון $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3=w^3$.

ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא $w^3$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה המשוואה $(z-1)^3=1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

**8)** נתונה המשוואה $z^3=-\sqrt{3}+i$.

א. מצאו את שורשי המשוואה: $z_1, z_2, z_3$.

ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3$.

ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9+(z_2)^9+(z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

**9)** נתונה המשוואה $z^2+|z|^2-2ti=18s^2$, כאשר $z$ הוא מספר מרוכב,
$s$ ו- $t$ הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- $z_1$, $z_2$ הם פתרונות המשוואה.

א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות $s$ ו- $t$.

ב. נתון $z_1\cdot z_2=-18i$. מצאו את הפרמטרים $s$ ו- $t$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $\overline{z}\cdot i+(\overline{z})^2+|z|^2+z+\overline{z}=0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.

הפרש סדרה זו הוא $1+\frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$,
כאשר $d$ נקרא הפרש הסדרה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $z_1 = cis60^\circ , z_2 = cis240^0 , z_3 = cis120^\circ , z_4 = cis300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

2) א. $z_1 = 1+\sqrt{3}i , z_2 = -\sqrt{3}+i ,\ z_3 = -1-\sqrt{3}i , z_4 = \sqrt{3}-i$ ב. שאלת הוכחה.

3) $z=0\ ,\ z=1\ ,\ z=-1$

4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i , z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i ,\ z_3 = -i$

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

5) א. $n=1,2,3,4,5\ \ z_n = 2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]$ ב. $q = cis72^\circ$

6) א. $z_1 = cis45^\circ ,\ z_2 = cis165^\circ ,\ z_3 = cis285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ , z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ , z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

9) א. $z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i\ ,\ z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i$ ב. $t=9\ ,\ s=\pm 1$

10) א. $z_1 = 0\ ,\ z_2 = -0.5+0.5i$ ב. $a_1 = -8.5$

# חילוק פולינומים

## שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

## תשובות סופיות

1) $x^2+1$

2) $0$

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) $x^2+2x+5$

6) $x^3-2x^2+5x-1$

7) $x^2-x-3$

8) $x^2-4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

## תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

## שאלות

בשאלות **1-4** נתון $v=(5+i,2-3i,7+2i)$ , $u=(3-2i,4i,1+6i)$.
מצאו:

**1)** א. $4u+v$ ב. $2i\cdot u-v$ **2)** $u\cdot v$

**3)** א. $u\cdot u$ ב. $|u|$

**4)** $|v|$

בשאלות **5-6** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1+iz_2+(1-i)z_3=1+4i$$

מעל **השדה** $\mathbf{F}$ : $iz_1+z_2+(1+i)z_3=2+i$ , כאשר:

$$(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3=5-i$$

**5)** $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

**6)** $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

בשאלות **7-8** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\overline{z}_1,z_3=z_1+\overline{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של $C^3$:

**7)** מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

**8)** מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות **9-10** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- $C^3$:

**9)** מעל $\mathbb{C}$.

**10)** מעל $\mathbb{R}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה $P$, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר $D$ מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

**11)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

**12)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

**13)** נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$ ב. $(-1+5i, -10+3i, -19)$

2) א. $20+35i$ ב. 66

3) $\sqrt{66}$

4) $\sqrt{92}$

5) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{R}}{=} (2, 3, -1)$

6) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{C}}{=} ((-1+i)t+1+i, 3, t)$

7) כן

8) לא

9) תלויים.

10) בלתי תלויים.

11) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$ : $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i, 2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i, 2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

12) ערכים עצמיים : $x=3$, וקטורים עצמיים : $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1, 1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

13) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i}, 1+\sqrt{3i}, -2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i}, 1-\sqrt{3i}, -2\right)$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©