אלגברה לינארית

פרק 3 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את המשוואות ומצאו את z :

1) $z^2+9=0$ **2)** $z^2-4z+5=0$ **3)** $z^2-6z+13=0$

בשאלות **4-7** חשבו :

4) $(i\sqrt{2})^6$ **5)** $(i^5-i^{13})^2$

6) $(4+i)-(2+10i)$ **7)** $(-4-i)(2-3i)$

8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 ממשי וכי z_1-z_2 מדומה.
א. מצאו קשר בין a_1 ל- a_2 ובין z_1 ל- z_2 .
ב. הראו כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

9) יהיו $z_1,z_2,...,z_n$ מספרים מרוכבים.
א. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
ב. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|$
ג. הוכיחו כי $|z_1^n|=|z_1|^n$

10) יהי z מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $z^{11}=1$ אז $z+\frac{1}{z}$ מספר ממשי.

11) יהי z מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $|z+1|=|z-1|$ אז iz מספר ממשי.

תשובות סופיות

1) $\pm 3i$
2) $2\pm i$
3) $3\pm 2i$
4) -8
5) 0
6) $2-9i$
7) $-11+10i$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות **3-1** חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

1) $\frac{5}{2+i}$

2) $\frac{1+i}{1-3i}$

3) $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

פתרו את המשוואות בשאלות **6-4** ומצאו את המספר המרוכב z:

4) $2z-6i=\overline{z}-1$

5) $z\overline{z}-\overline{5z}=10i$

6) $(1+i)z^2+2z-i+1=0$

7) פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$$

8) חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

9) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$

בשאלות **11-10** פתרו את המשוואות:

10) $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$

11) $z^2-i\overline{z}+6=0$

12) הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{z}{\overline{z}^2}-\frac{\overline{z}}{z^2}$ כאשר $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

13) נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z-i|=1$.

הוכח:

א. $|z|^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)$

ב. $\dfrac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14) המספר $\dfrac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.

מצאו את a.

15) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\dfrac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

תשובות סופיות

1) $2-i$

2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

3) $-\frac{1}{2}+i$

4) $z=-1+2i$

5) $z=1+2i, z=4+2i$

6) $z=i\,, z=-1$

7) $z=2-3i,\ \ w=5+i$

8) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$

9) א. $z_{1,2}=i,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i,\ \ 2-5i$

10) $z_1=-2-5i,\ \ z_2=3i$

11) $z_1-3i,\ z_2=2i$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $a=-\frac{3}{4}$

15) שאלת הוכחה.

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית:

1) $1+\sqrt{3}i$ **2)** $-1-i$ **3)** $-3-\sqrt{3}i$ **4)** $1-i$

5) $1+i$ **6)** $\sqrt{3}-i$ **7)** $\sqrt{3}i$ **8)** -8

9) נתון המספר המרוכב $z=Rcis\theta$.
הביעו באמצעות R ו-θ את המספרים:
א. $\overline{z}$
ב. $\frac{1}{z}$
ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$
ה. iz
ו. $z\cdot\overline{z}$

10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:
א. $z+\overline{z}$
ב. $z\cdot\overline{z}$
ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:
א. $z^2-\overline{z}^2$
ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

12) הוכיחו:
א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$
ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

תשובות סופיות

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3) $\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

7) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$

9) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$

ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות **1-6** חשבו :

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ **2)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

4) $\sqrt[6]{-8}$ **5)** $\sqrt[5]{1}$ **6)** $\sqrt[3]{-8}$

7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות :

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי : $\sin 1+\sin 2+...+\sin n=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{32}i$

2) -2^9

3) -1

4) $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$

5) $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4$

6) $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right) \quad k=0,1,2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

2) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i.

ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $z^5=-16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

6) נתון $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3=w^3$.

ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3.

7) נתונה המשוואה $(z-1)^3=1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

8) נתונה המשוואה $z^3=-\sqrt{3}+i$.
א. מצאו את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3.
ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3$.
ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9+(z_2)^9+(z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

9) נתונה המשוואה $z^2+|z|^2-2ti=18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.
א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t.
ב. נתון $z_1\cdot z_2=-18i$. מצאו את הפרמטרים s ו- t.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. פתרו את המשוואה $\bar{z}\cdot i+(\bar{z})^2+|z|^2+z+\bar{z}=0$.
ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.
הפרש סדרה זו הוא $1+\frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$,
כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1=cis60^\circ, z_2=cis240^0, z_3=cis120^\circ, z_4=cis300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

2) א. $z_1=1+\sqrt{3}i, z_2=-\sqrt{3}+i,\ z_3=-1-\sqrt{3}i, z_4=\sqrt{3}-i$ ב. שאלת הוכחה.

3) $z=0\ ,\ z=1\ ,\ z=-1$

4) א. $z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i,\ z_3=-i$

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

5) א. $z_n=2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]\ \ n=1,2,3,4,5$ ב. $q=cis72^\circ$

6) א. $z_1=cis45^\circ,\ z_2=cis165^\circ,\ z_3=cis285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $z_3=\sqrt[3]{2}cis290^\circ, z_2=\sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_1=\sqrt[3]{2}cis50^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

9) א. $z_2=-3s-\frac{t}{3s}i\ ,\ z_2=-3s-\frac{t}{3s}i$ ב. $t=9\ ,\ s=\pm1$

10) א. $z_2=-0.5+0.5i,\ z_1=0$ ב. $a_1=-8.5$

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

שאלות

בשאלות **1-4** נתון $v=(5+i,2-3i,7+2i)$, $u=(3-2i,4i,1+6i)$.
מצאו:

1) א. $4u+v$ ב. $2i\cdot u-v$ **2)** $u\cdot v$

3) א. $u\cdot u$ ב. $|u|$

4) $|v|$

בשאלות **5-6** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

, כאשר:

5) $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

6) $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

בשאלות **7-8** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות **9-10** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

9) מעל $\mathbb{C}$.

10) מעל $\mathbb{R}$.

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **13-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

11) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

13) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

1) א. $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$ ב. $(-1+5i, -10+3i, -19)$

2) א. $20+35i$ ב. 66

3) $\sqrt{66}$

4) $\sqrt{92}$

5) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{R}}{=} (2,3,-1)$

6) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{C}}{=} ((-1+i)t+1+i, 3, t)$

7) כן

8) לא

9) תלויים.

10) בלתי תלויים.

11) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i, 2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i, 2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

12) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

13) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i}, 1+\sqrt{3i}, -2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i}, 1-\sqrt{3i}, -2\right)$$