מכניקה קלאסית

פרק 13 - מסה משתנה

תוכן העניינים

1. הקדמה ופיתוח הנוסחה 1
2. שימוש בנוסחה 3
3. סיכום מסה משתנה ..... (ללא ספר)
4. תרגילים נוספים 4

שימוש בנוסחה:

רקע

אם מסת הגוף משתנה אז צריך לעבוד בניסוח הכללי יותר של החוק השני

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

(הנוסחה $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ לא נכונה עבור גוף שהמסה שלו משתנה)

נוסחה כללית לתנועה גופים שפולטים מסה

$$\sum \vec{F}_{ext} = M(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}_{rel}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

כאשר

$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ - קצב הפליטה ((חיובי כאשר חומר יוצא מהגוף ושלילי אם חומר נכנס לגוף)

$\vec{v}_{rel}$ - מהירות החומר שנפלט ביחס לגוף (אם החומר נפלט אחורה אז היא צריכה להיות שלילית)

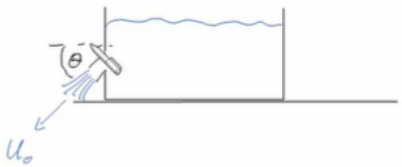
שאלות:

1) חיכוך במסה משתנה

עגלה בעלת מסה התחלתית M_0 נעה על משטח עם חיכוך.

לעגלה מחובר בקצה האחורי צינור המשפריץ מים בקצב α ומהירות u_0.

הצינור נמצא בזווית θ ביחס לציר ה-x.



נתון: M_0 , θ , α , μ_k , u_0.

א. כתוב את משוואת התנועה.

ב. מצא את המהירות כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $-\mu_k\left(\mathrm{M}(t)g-\mathrm{u}_0\sin\theta\alpha\right)=\mathrm{M}(t)\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}-\alpha\mathrm{u}_0\cos\theta$

ב. $\mathrm{v}(t)=-\mu_k gt+\left(\frac{\mathrm{C}}{\alpha}\ln\frac{\mathrm{M}_0-\alpha t}{\mathrm{M}_0}\right)+\mathrm{v}_0$

שימוש בנוסחה:

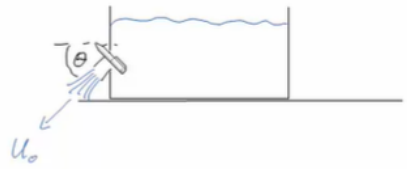
שאלות:

1) חיכוך במסה משתנה

עגלה בעלת מסה התחלתית M_0 נעה על משטח עם חיכוך.

לעגלה מחובר בקצה האחורי צינור המשפריץ מים בקצב α ומהירות u_0.

הצינור נמצא בזווית θ ביחס לציר ה-x.



נתון: M_0 , θ , α , μ_k , u_0.

א. כתוב את משוואת התנועה.

ב. מצא את המהירות כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $-\mu_k\left(M(t)g-u_0\sin\theta\alpha\right)=M(t)\frac{dv_x}{dt}-\alpha u_0\cos\theta$

ב. $v(t)=-\mu_k gt+\left(\frac{C}{\alpha}\ln\frac{M_0-\alpha t}{M_0}\right)+v_0$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) עגלה עם מטף קצף

מתקינים על עגלה מטף קצף.
המטף פולט קצף אחורנית (ואופקית) מהעגלה במהירות u ביחס לעגלה ובקצב $\left|\frac{dm}{dt}\right| = a - bt$.

פליטת הקצף גורמת לעגלה לנוע בקו ישר.
מסת העגלה (כולל המטף) בתחילת התנועה היא M_0 ואין חיכוך בין העגלה לקרקע.

א. מהן היחידות של a ו- b? הנח שכל הגדלים האחרים ב- m.k.s.

ב. מצאו את תאוצת העגלה כתלות בזמן כל עוד $t > \frac{a}{b}$.

ג. מהי מהירות העגלה כתלות בזמן?

2) חללית מנתקת מיכלים

חללית יכולה לנתק את מכלי הדלק הריקים שלה.
מיכל שהתרוקן מתנתק ונופל לים וכל משקלו של המיכל הריק אינו מעמיס עוד על החללית.
נתונה חללית בעלת מסה התחלתית- M_0, קצב פליטת גזים- α ומהירות הגז ביחס לחללית- u.

כאשר החללית מאבדת ממשקלה מסה m (מסת הדלק שהיה במיכל) היא מנתקת את המיכל שמסתו k וממשיכה במעופה הרגיל. כאשר החללית מאבדת ממשקלה m נוסף, נגמר הדלק במכליה והיא מכבה מנועים וממשיכה במהירות הסופית.
הנח שהחללית מתחילה ממנוחה ושהיא משוגרת מתחת חלל, כלומר אין השפעת כבידה על החללית.

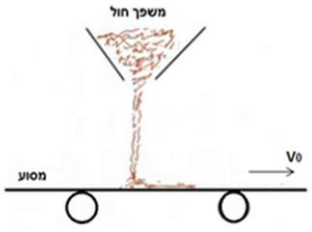
א. מהי מהירות החללית רגע לפני ניתוק המיכל הראשון?

ב. מהי מהירות החללית לאחר ניתוק המיכל?

ג. מהי מהירותה הסופית של החללית?
(הנח שהיא שומרת על מהירותה לאחר כיבוי המנועים).

ד. בכמה שיפרה החללית את מהירותה הסופית על ידי ניתוק המיכלים?

3) משפך חול על מסוע



משפך חול מפיל חול על מסוע בקצב $\frac{dm}{dt} = At$
כאשר A קבוע. אין חיכוך בין המסוע לרצפה.

א. מה הכוח F הדרוש על מנת למשוך את המסוע במהירות קבועה (ונתונה) V_0 ?

ב. מהו ההספק (אנרגיה ליחידת זמן) שמשקיע הכוח?

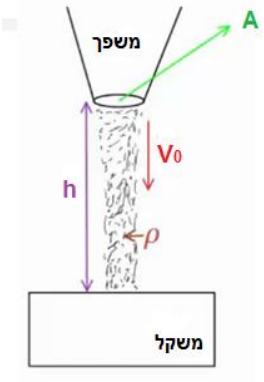
4) בלון

בלון בעל מסה M מלא בגז. נתון כי $\frac{3}{4}$ ממסת הבלון היא מסת הגז.
משחררים את הבלון ממנוחה והגז יוצא במהירות u_0 ביחס לבלון.
נתון כי הבלון מאיץ בקו ישר כלפי מעלה בתאוצה של $0.5g$.

א. מצא את קצב פליטת הגז מהבלון.

ב. מצא את הגובה המקסימלי אליו יגיע הבלון.

5) משפך על משקל



משפך חול נמצא מעל משקל, החול יוצא מהמשפך במהירות V_0. שטח החתך של פתח המשפך הוא A
ונתון כי המשפך נמצא בגובה H מעל המשקל.
נתונה צפיפות המסה של החול ρ.
הזנח את גובה החול המצטבר על המשקל.

א. מהי כמות החול היוצאת מהמשפך ביחידת זמן?

ב. מה מהירות החול בהגיעו לפני פגיעתו במשקל?

ג. במהלך המילוי כאשר המשקל מראה W מה היחס בין המשקל האמיתי של החול לערך שמראה המשקל?

ד. נניח כי כאשר המשקל מראה את המשקל מסעיף ג' סוגרים את המשפך. מה יראה המשקל לאחר זמן רב?

ה. לאחר האמור בסעיף ד' מאיצים את המשקל בתאוצה של 5 מטר לשנייה בריבוע כלפי מעלה. מה יראה המשקל?

6) טיפת גשם

טיפת גשם נופלת דרך ענן וסופחת מים יחסית לשטח הפנים שלה.

קצב שינוי המסה של הטיפה נתון לפי $\frac{dm}{dt}=4\pi r^2 b$, כאשר b קבוע ו- r הוא רדיוס הטיפה. נתונה גם צפיפות המים ρ. הזנח את התנגדות האוויר.

הנח כי הטיפה מתחילה ליפול ממנוחה ורדיוסה ההתחלתי הוא r_0.

א. מצא את רדיוס הטיפה כפונקציה של הזמן.

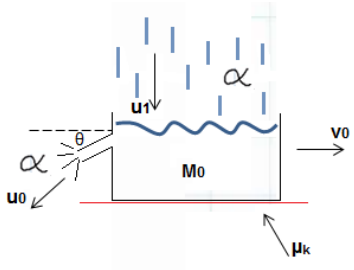
ב. חשב את מהירות הטיפה כפונקציה של הזמן.

ג. מצא את התאוצה של הטיפה זמן קצר לאחר תחילת תנועתה.

ד. מצא את תאוצת הטיפה לאחר זמן רב.

פתרון משוואה דיפרנציאלית מהצורה: $\frac{dv}{dr}=\mathrm{A}\frac{\mathrm{v}}{r}+\mathrm{B}$ הוא $\mathrm{v}(r)=(\mathrm{C}r)^{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{B}}{1-\mathrm{A}}r$.

7) עגלה עם גשם, משאבה וחיכוך



עגלה בעלת מסה M_0 נוסעת על משטח עם חיכוך.

על העגלה יורד גשם בקצב a ובמהירות u_1 בציר האנכי בלבד. בנוסף, לעגלה מחוברת משאבה בקצה האחורי, המוציאה מים מן העגלה החוצה במהירות u_0 ובקצב זהה a.

המשאבה מוציאה את המים בזווית θ מתחת לציר ה- x (ראה ציור).

לעגלה מהירות התחלתית V_0.

מקדם החיכוך הקינטי μ_k וכל הגדלים הרשומים בשאלה נתונים.

א. מצא את משוואת התנועה של העגלה.

ב. מצא את המהירות הסופית של העגלה.

ג. מצא את מהירות העגלה כפונקציה של הזמן.

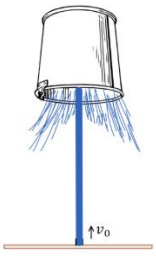
8) חול נשפך מקרונית

קרונית עמוסה בחול נעה על פסים ללא חיכוך במהירות v.

ברגע מסוים נפתח חלון בתחתית הקרונית וחול מתחיל להישפך בקצב קבוע α.

מהי מהירות הקרונית כתלות בזמן?

9) דלי מוחזק באוויר



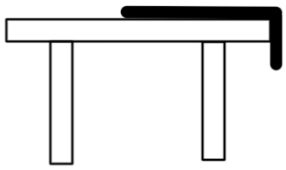
דלי בעל מסה M מוחזק הפוך באוויר באמצעות זרם מים.

המים יוצאים מצינור באדמה במהירות v_0 כלפי מעלה ובקצב α.

מהו הגובה בו הדלי נמצא באוויר?

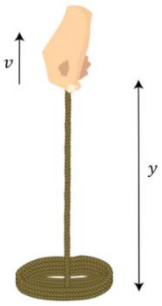
הנח שהמים לא ניתזים חזרה לאחר הפגיעה בדלי.

10) חבל מחליק משולחן



חבל באורך L ומסה M מונח על שולחן חסר חיכוך כך שהקצה של החבל באורך d נשמט מחוץ לשולחן.
החבל מוחזק ומשוחרר ממנוחה.
מה תהיה מהירות החבל כאשר כל אורך החבל ייפול מהשולחן.
פתור משיקולי תנע בלבד! הנח שהחבל אינו פוגע ברצפה.

11) מרימים חבל ממנוחה



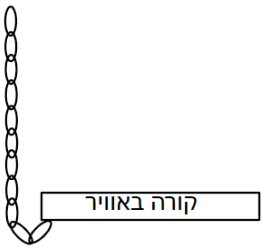
חבל אחיד, בעל מסה M ואורך L מונח על שולחן.
מרימים קצה אחד של החבל במהירות קבועה v.

א. מהי המתיחות בקצה העליון של החבל כתלות בפרמטרים של השאלה ובגובה הקצה y?

ב. מהי העבודה שעושה היד ביחידת זמן?

ג. מהו קצב שינוי האנרגיה הכוללת של החבל?

12) שרשרת מחוברת לקורה נופלת



שרשרת באורך L וצפיפות אחידה λ מחוברת לקורה התלויה באוויר.
מרימים את השרשרת אנכית מעל הקורה ומשחררים ממנוחה.
הנח שהחלק שמחובר לקורה בהתחלה זניח, כלומר גובה הקצה העליון של השרשרת הוא L מעל החיבור עם הקורה.
הנח שהשרשרת לא פוגעת בקרקע במהלך הנפילה.

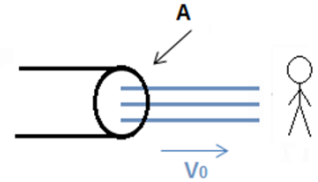
א. מהי מהירות החלק שנופל כתלות בזמן?

ב. מהו התנע של כל השרשרת כתלות בזמן?

ג. מה הכוח שמפעילה הקורה על השרשרת כתלות בזמן?

ד. מה גודל הכוח שמפעילה הקורה ברגע הנפילה האחרון של השרשרת אם מסת השרשרת היא 2 ק"ג?

13) צינור משפריץ על אדם*

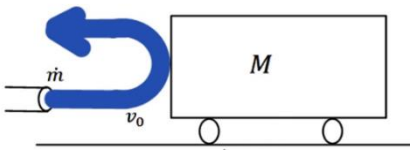


צינור משפריץ מים על אדם.
לצינור שטח חתך A וצפיפות המים נתונה ρ.
נתונה גם מהירות יציאת המים מהצינור v_0.

א. מצא את הכוח שפועל על אדם הנמצא במנוחה, בהנחה שהמים אינם ניתזים חזרה.

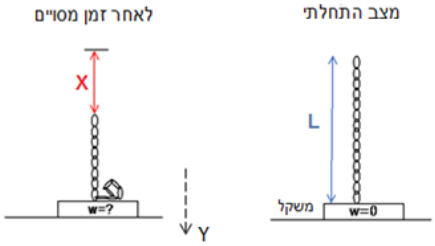
ב. מצא את הכוח הפועל על אדם הבורח במהירות $v < v_0$.

14) צינור משפריץ מים על עגלה*



צינור משפריץ מים על עגלה בעלת מסה M.
המים יוצאים מהצינור במהירות v_0 ובקצב $\dot{m}$ נתון (הנח כי מהירות המים קבועה עד לפגיעה בעגלה) . המים מתנגשים התנגשות אלסטית ביחס לעגלה.
מצא את מהירות העגלה כפונקציה של הזמן.

15) שרשרת נופלת על מד משקל*



שרשרת בעלת אורך L ומסה M מוחזקת בצורה אנכית מעל משקל כך שהקצה התחתון שלה בדיוק נוגע במשקל.
השרשרת משוחררת ממנוחה.
מצא מה מראה המשקל כפונקציה של x (המרחק אותו עבר הקצה העליון).

תשובות סופיות:

1) א. $[b]=\frac{kg}{sec^2}$, $[a]=\frac{kg}{sec}$ ב. $\frac{dv}{dt}=\frac{u(a-bt)}{M_0-at+\frac{1}{2}bt^2}$

ג. $v(t)=u\ln\left[\frac{M_0}{M_0-at+\frac{1}{2}bt^2}\right]$

2) א. $u\ln\frac{M_0}{M_0-m}$ ב. לא משתנה.

ג. $u\ln\frac{M_0(M_0-2m-k)}{(M_0-m)(M_0-m-k)}$ ד. $u\ln\left(\frac{M_0-m-k}{M_0-2m-k}\right)$

3) א. $F=V_0 A t$ ב. $\rho=V_0^2 A t$

4) א. $-\frac{3g}{2u_0}Me^{-\frac{3g}{2u_0}t}$ ב. $y_{max}=\frac{g}{4}\left(\frac{2u_0}{3g}\ln 4\right)^2+\frac{1}{2g}\left(\frac{u_0}{3}\ln 4\right)^2$

5) א. $\frac{dm}{dt}=\rho A V_0$ ב. $V_F=\sqrt{V_0^2+2gh}$ ג. $\frac{W}{W'}=1-\frac{V_F\rho A V_0}{W'}$

ד. $W=W+\rho Ahg$ ה. $W=W+\frac{W}{g}a_0$

6) א. $r=\frac{b}{\rho}t+r_0$ ב. $v(r)=-\frac{\rho g}{4b}r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-3}+\frac{\rho g}{4b}r$

ג. $a(t=0)=g$ ד. $\lim_{t\to\infty}a(t)=\lim_{r\to\infty}a(r)=\frac{g}{4}$

7) א. $-\mu_k N=M_0\frac{dv}{dt}+\alpha V(t)-u_0\alpha\cos\theta$ ב. $V(t)=(u_0\alpha\cos\theta-\mu_R N)\frac{1}{\alpha}$

ג. $V(t)=\frac{1}{\alpha}\left(C-(C-\alpha V_0)e^{-\frac{\alpha}{M_0}t}\right)$

8) $v=const$

9) $h=\frac{\alpha v_0^2-Mg}{2g\alpha}$

10) $V_F^2=\frac{g}{2}(L^2-d^2)$

11) א. $F=\frac{M}{L}gy+\frac{M}{L}v^2$ ב. $\rho=\frac{M}{L}gyv+\frac{M}{L}v^3$ ג. $\frac{dE}{dt}=\frac{M}{L}gyv+\frac{M}{L}v^3$

12 א. $v = gt$ ב. $\rho_T = \lambda\left(L - \frac{1}{4}gt^2\right)gt$ ג. $\frac{3}{4}\lambda g^2 t^2$ ד. 60_N

13 א. $\sum F = -\sum F = \rho A v_0^2$ ב. $\sum F = \rho A\left(v_0 - v\right)^2$

14 $v(t) = v_0\left(1 - \frac{1}{2\dot{m}}Mt + 1\right)$

15 $N(x = L) = 3Mg$