מתמטיקה לפיננסים

פרק 4 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות 1
2. המטריצה ההופכית 6

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6},\ B_{4\times6},\ C_{6\times2},\ D_{4\times2},\ E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$	ב. AB	ג. $AC-D$	ד. $AE-B$
ה. $B+AB$	ו. $E(B+A)$	ז. $(E+A^T)D$	ח. E^TB
ט. $E(AC)$	י. $E(B-A)$		

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 1-2^n & 1\end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 2×4 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 2×6 ח. לא ט. 4×6 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$
ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix}a&-\dfrac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב.
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$$

18)
$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1&1\\5&-7&k^2+3\\3&-1&k+3\end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix}1&1&1&1&k\\1&1&1&k&1\\1&1&k&1&1\\1&k&1&1&1\\k&1&1&1&1\end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X:

12) א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

15) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&9\end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X\left(2B\right)^{-1}=B+I$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש-A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I-A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש-$D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
הוכיחו: אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה AB לא הפיכה.

ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.

ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

26) נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים a,b,c,d כך ש-M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$

28) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו-$A-I$ הפיכות.

29) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$B^2A=-2B^3$ (1) וגם $B^3+AB^2=3I$ (2).

הוכיחו ש-A ו-B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו-B^{-1} באמצעות B.

30) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש-B הפיכה.

ב. ידוע ש-B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש-$A^n=0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו-$I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) נתונות שתי מטריצות, A ו-B, מסדר n.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל-A ול-A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.

ב. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.

ג. אם A,B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.

ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©