

# אלגברה ליניארית

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות ..... 1
2. המטריצה ההופכית ..... 6
3. בחזרה למערכת משוואות ליניארית ..... 9
4. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית ..... 10

## מטריצות

## שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

- (2) מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

(4)  $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6)  $I_2 BC$

(7)  $tr(C^T C)$

(8)  $DABC$

9 נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$(A - I)(A + I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

10 אפינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקיימות  $A^2 = -4I$ .

$$11 \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12 שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

13 תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$AA^T = 0 \text{ הוכיחו כי } A = 0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14 יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

$$15 \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

- 17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

- 18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$  ב. לא. ג.  $4 \times 2$  ד. לא. ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$  ח. לא ט.  $6 \times 4$  י.  $6 \times 6$

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$  ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.  $(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{17 א.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \cdots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min \{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{18}$$

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.  
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{16) נתון}$$

חשבו את  $Y$ , אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$ .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{17) נתון}$$

חשבו את  $B$ , אם נתון בנוסף כי  $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$ .

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad A \quad \text{א.} \quad CD^2 - A \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

(1) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה :  $3x - 2y + 2z = 5$  .

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(2) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה :  $y + z + t = 1$  .

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

### תשובות סופיות

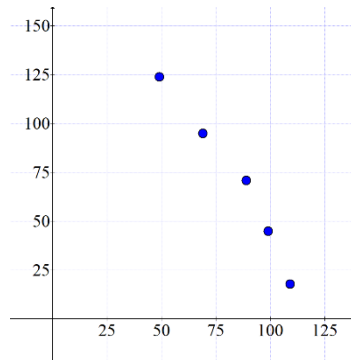
$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2)$$

## שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

### שאלות

- 1) נתונות חמש נקודות במישור:  $(-4, -1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ . מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- 2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



| $price(x)$ | $Demand / sales(y)$ |
|------------|---------------------|
| 49\$       | 124                 |
| 69\$       | 95                  |
| 89\$       | 71                  |
| 99\$       | 45                  |
| 109\$      | 18                  |

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

### תשובות סופיות

- 1)  $f(x) = 0.8x + 2$
- 2) א.  $f(x) = -1.7x + 211$  ב. 119.2 יחידות.
- ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
- ד. 14.41