

# אלגברה ליניארית

פרק 8 - מטריצות והעתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. מטריצה שמייצגת העתקה ..... 1
2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס ..... 7
3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה ..... 10

## מטריצה שמייצגת העתקה

### הערה :

כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים). לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

### שאלות

(1) נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_2}^{B_1}$ .

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$$

(2) נתונה העתקה לינארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ .

נתונים שני בסיסים של  $R^3$ :

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_1$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[T]_{B_1}$ .

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[T]_{B_2}$ .

ג. אשרו את הטענות הבאות:

$$1. [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$$

$$2. [T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$$

$$3. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2}$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3) נתונה העתקה לינארית  $T: R^3 \rightarrow R^3$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו  $B_1$  ו-  $B_2$  שני בסיסים של המרחב  $R^3$ , ויהי  $T$  אופרטור לינארי על  $R^3$ .

$$\text{נתון כי: } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו- } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

חשבו את  $[M]_{B_2}^{B_1}$  ואת  $[T]_{B_2}$ .

(5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{לפי הבסיס}$$

(6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $D: P_4[R] \rightarrow P_3[R]$ ,  $D(p(x)) = p'(x)$ , לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

(7) נתונה העתקה לינארית  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ . ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) נתונה העתקה לינארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס  $B = \{1, 1-x, x+x^2\}$ ,

$$. [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את  $T(p(x))$ .

\* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את  $T^2(p(x))$ .

(10) תהי  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  העתקה לינארית, ותהי  $A$  מטריצה ממשית,

כך שמתקיים  $T(v) = Av$  לכל  $v \in \mathbb{R}^n$ .

נתון כי  $B$  בסיס ל- $\mathbb{R}^n$  ו- $\text{rank}(A) = n$ .

הוכיחו כי  $[T]_B$  הפיכה.

**11** נתונה העתקה לינארית  $T: P_3[R] \rightarrow P_3[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**12** נתונה העתקה לינארית  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**13** נתונה העתקה לינארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ ;  $T(a + bx + cx^2) = b + cx$ .

הוכיחו ש- $T$  העתקה נילפוטנטית.

**14** יהי  $V = \mathbb{R}_2[x]$  מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל  $\mathbb{R}$ .

נתון הבסיס  $B = \{1, x, x^2\}$ , ונתונה ההעתקה הלינארית

$$T(p(x)) = xp''(x) - p'(x); T: V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת  $[T]_B$ .

ב. מצאו בסיס וממד עבור  $\text{Im}(T), \text{Ker}(T)$ .

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות לינאריות  $S, T: V \rightarrow V$ .

יהי  $B = \{u, v, w\}$  בסיס ל- $V$ .

$$\text{נתון כי: } \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

א. הוכיחו כי:  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ ,  $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ .

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם  $\{T(u), T(v), T(w)\}$  פורשת את  $V$ .

ד. קבעו האם  $\{S(u), S(v), S(w)\}$  פורשת את  $V$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג. הוכחה.}$$

$$\text{ד. לא.} \quad \text{ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.} \quad \text{ו. 0 עייע יחיד; הוייע שלו: (1, -1, 1).} \quad \text{ז. לא.}$$

$$(3) \quad T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$$

$$(4) \quad [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6) \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$$

$$(9) \quad \text{א. } T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c) + (2a+4c)x + (2a+b+2c)x^2$$

$$\text{ב. } T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2$$

$$(10) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(11) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\{-x+x^3, -1+x^2\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\{1+x^2, x+x^3\}$$

$$\text{ב. } T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

$$(12) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{ב. } \text{tr}(T) = 15, \quad \det(T) = 0, \quad \text{rank}(T) = 2$$

$$(13) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(14) \quad \text{א. } [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \quad \dim(\text{Im}(T)) = 1$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1, x^2\}, \quad \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

$$(15) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

## מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

### שאלות

(1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות,

ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של  $R^n$  :

א.  $T(x, y) = (x + y, y, -x)$  ,  $T : R^2 \rightarrow R^3$

ב.  $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$  ,  $T : R^4 \rightarrow R^2$

(2) נתונה העתקה לינארית  $T : R^4 \rightarrow R^2$  ;  $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$

מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של  $R^4$  לבסיס הסטנדרטי של  $R^2$ .

(3) תהי  $T : R^3 \rightarrow R^2$  העתקה לינארית המוגדרת על ידי :

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$$

חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה  $T$  מהבסיס

$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  של  $R^3$  , לבסיס  $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$  של  $R^2$ .

כלומר, את  $[T]_{B_1}^{B_2}$ .

(4) עבור העתקה לינארית  $T : R^3 \rightarrow R^2$  מתקיים :  $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,

כאשר :  $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  ,  $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(5) עבור העתקה לינארית  $T : R^3 \rightarrow R^2$  מתקיים :  $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

כאשר  $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$  ,  $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(6) נתונה העתקה לינארית  $T : P_3[R] \rightarrow P_2[R]$

המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $T$  , מהבסיס הסטנדרטי של  $P_3[R]$

לבסיס הסטנדרטי של  $P_2[R]$  , נתונה על ידי :  $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(7) נתונה העתקה לינארית  $T: P_2[R] \rightarrow R^3$ , אשר המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית  $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$ , שהמטריצה המייצגת אותה

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V) = n$ ,

ויהיו  $B_1, B_2$  בסיסים סדורים של  $V$ . הוכיחו או הפריכו:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n. \quad \text{א.}$$

ב. אם  $T$  העתקת זהות, אז בהכרח  $[T]_{B_1}^{B_1} = I_n$ .

ג. אם  $T$  העתקת זהות, אז בהכרח  $[T]_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} = I_n$ .

(10) נתונה העתקה לינארית  $T: P_2[R] \rightarrow R^3$  המוגדרת על ידי:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.  
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את  $T^{-1}(a, b, c)$ .

ג. חשבו את  $T^4(a + bx + cx^2)$ .

(11) נתונה העתקה לינארית  $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$ , המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.  
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את  $T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3)$ .

(12) חשבו את  $ST$  ואת  $TS$ , עבור ההעתקות:

$$S(x, y) = (x - y, x + y, y) \quad ; \quad S: R^2 \rightarrow R^3$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow R^2$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ א. } [T] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

$$(2) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [T] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

$$(5) \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$(6) \quad T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (b + 2c)1 + (2c + 6d)x + (3d)x^2$$

$$(7) \quad T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

$$(8) \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

(9) שאלת הוכחה.

$$(10) \quad T^{-1}(a, b, c) = (a - b + c)1 + (b - c)x + cx^2 \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

ג. לא ניתן.

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$\text{ב. } T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad ST(a + bx + cx^2) = (a + c, a + 2b - c, b - c)$$

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

### שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית,  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- $W$  את קבוצת כל המטריצות  $P$ , שעבורן המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  היא וקטור עצמי של ההעתקה.  
א. מצאו את  $W$ .  
ב. הוכיחו כי  $W$  היא תת-מרחב של  $M_2[R]$ , ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית,  $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 10.  
ידוע כי  $A$  היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.  
חשבו את  $|P|$ .

(3) מצאו העתקה לינארית  $T$ , שעבורה המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. נתונה העתקה לינארית  $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
ב. נתונה העתקה לינארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית  $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$ .  
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
ג. במידה וכן, חשבו  $T^{2009}(x, y, z)$ .

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.  
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את  $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ .

7) נתונה העתקה לינארית:  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$  ;  $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.  
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n$ .

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית.

- א. הוכיחו ש- $T$  הפיכה אם"ם כל הערכים העצמיים של  $T$  שונים מאפס.  
 ב. הוכיחו כי אם  $T$  הפיכה, אז ל- $T$  ול- $T^{-1}$  יש את אותם וקטורים עצמיים.  
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של  $T$  ושל  $T^{-1}$ ?

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א. } v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1). \quad \text{ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x = 0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1). \quad \text{לא.}$$

$$(5) \quad v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), v_{\lambda=2} = (1, 0, 1). \quad \text{ב. ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ג. } T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad \text{א. } [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. } v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד. } T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א. } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } v_{\lambda=1} = 1. \quad \text{ג. לא ניתנת לליכסון.}$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$