

אלגברה לינארית 2

פרק 2 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה.....1

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית, $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P , שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי של ההעתקה.
 א. מצאו את W .
 ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית, $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
 ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
 חשבו את $|P|$.

(3) מצאו העתקה לינארית T , שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
 ב. נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$.
 א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
 ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x, y, z)$.

6 נתונה העתקה לינארית:

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7 נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8 יהי V מרחב וקטורי מממד n .

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

- א. הוכיחו ש- T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.
 ב. הוכיחו כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1} ?

תשובות סופיות

$$(1) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \text{ א.} \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ב.}$$

$$4^{10} = |P| \quad (2)$$

$$T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R) \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{א.} \quad v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), \quad v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), \quad v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1). \quad \text{ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x=0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1). \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{ב. ניתנת לליכסון.} \quad v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), \quad v_{\lambda=2} = (1, 0, 1)$$

$$\text{ג.} \quad T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$\text{ב.} \quad v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד.} \quad T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א.} \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad v_{\lambda=1} = 1 \quad \text{ג. לא ניתנת לליכסון.}$$

(8) שאלת הוכחה.