

# אלגברה ליניארית

פרק 10 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

1. מטריצות אורתוגונליות.....1
2. העתקות אורתוגונליות.....6
3. דמיון ולכסון אורתוגונלי.....9

## מטריצות אורתוגונליות

### שאלות

- (1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.  
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

ב. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ג. 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

- א. מטריצה ריבועית  $A$  היא אורתוגונלית אם ורק אם  $A^T A = I$ .  
ב. מטריצה אורתוגונלית  $A$  היא הפיכה ומתקיים  $A^{-1} = A^T$ .

- (3) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי  $A$  מטריצה אורתוגונלית.  
הוכיחו כי המטריצות  $A^{-1}, A^T$  אורתוגונליות.  
ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.  
ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.  
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?  
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?  
ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

- (4) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n$ .  
הוכיחו או הפריכו:

- א. עמודותיה של המטריצה  $A$  מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $R^n$ ,  
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $R^n$ .  
ב. עמודותיה של המטריצה  $A$  מהוות בסיס אורתוגונלי ל- $R^n$ ,  
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- $R^n$ .

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n$ , אשר עמודותיה,  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,

מהוות בסיס אורתוגונלי ל- $R^n$ . נסמן  $v_i v_i = \lambda_i$ .

הוכיחו כי  $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

ד. הפכו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{pmatrix}$ .

(6) הוכיחו את המשפט :

יהיו  $B$  ו- $C$  שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב  $R^n$ .  
אז מטריצת המעבר מ- $B$  ל- $C$  היא מטריצה אורתוגונלית.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $A$  מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי  $B$  לבסיס  $C$ ,  
של המרחב  $R^n$ .

הוכיחו כי אם  $A$  מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס  $C$  גם אורתונורמלי.

ב. תהי  $A$  מטריצת המעבר מבסיס  $B$  לבסיס אורתונורמלי  $C$ ,  
של המרחב  $R^n$ .

הוכיחו כי אם  $A$  מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס  $B$  גם אורתונורמלי.

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי אם  $A$  מטריצה אורתוגונלית מסדר  $n$ ,

אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים  $B$  ו- $C$ , של המרחב  $R^n$ ,  
כך ש- $A$  משמשת מטריצת המעבר מ- $B$  ל- $C$ .

ב. יהי  $v \in R^n$ , כך ש- $\|v\| = 1$ .

הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא  
הווקטור  $v$ .

9) תהי  $A \in M_n(\mathbb{R})$  אורתוגונלית וסימטרית.

נגדיר  $B = I + A$ .

א. הוכיחו כי  $B^2 = 2B$ .

ב. ידוע ש- $|B| = 1024$ .

מצאו את  $n$ .

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית  $30^\circ$  ב- $R^2$ .

ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  ב- $R^2$ .

ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר  $y = \sqrt{3}x$  ב- $R^2$ .

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

ב.  $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

ג.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  מסובבת וקטור במישור ב- $\theta$  מעלות

נגד כיוון השעון, כאשר  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור  $v \in \mathbb{R}^2$  לבין  $Rv$  היא  $\theta$ .

13) נסמן:  $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $\text{Ref}_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

הוכיחו כי:

א.  $\text{Rot}_\theta \cdot \text{Rot}_\phi = \text{Rot}_{\theta+\phi}$

ב.  $\text{Ref}_{\theta/2} \cdot \text{Ref}_{\phi/2} = \text{Rot}_{\theta-\phi}$

**(14)** תהי  $A_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  מטריצה אורתוגונלית.  
 הוכיחו ש- $A$  היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

**(15)** יהי  $v_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$  וקטור יחידה.  
 נגדיר מטריצה  $H_{n \times n}$  על ידי:  $H = I - 2v \cdot v^T$  (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).  
 הוכיחו:

א.  $H$  מטריצה סימטרית.

ב.  $H$  מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2 = I$ .

ג. המטריצה  $H$  עבור  $v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  היא מטריצת שיקוף ביחס לישר  $y = -x$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ א.} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

ג. לא אורתוגונלית.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) א. שאלת הוכחה. ב.  $n = 10$ 

$$(10) \quad \text{א.} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר  $y = 0.4142x$ .ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר  $y = \frac{1}{2}x$ .ג. המטריצה מתארת סיבוב של  $90^\circ$  במישור.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

## העתקות אורתוגונליות

### שאלות

- (1) תהי  $T: R^n \rightarrow R^n$  העתקה לינארית.  
הוכיחו את המשפט:  $T$  אורתוגונלית  $\Leftrightarrow \forall u \in R^n, \|T(u)\| = \|u\|$ .
- (2) תהי  $T: R^n \rightarrow R^n$  העתקה לינארית אורתוגונלית.  
א. הוכיחו כי  $T$  איזומורפיזם.  
ב. הוכיחו כי גם  $T^{-1}$  אורתוגונלית.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. תהי  $A$  מטריצה אורתוגונלית מסדר  $n$ .  
נגדיר העתקה לינארית  $T: R^n \rightarrow R^n$ , על ידי  $T(u) = Au$ .  
הוכיחו כי  $T$  היא העתקה אורתוגונלית.  
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית  $T: R^n \rightarrow R^n$ , ניתן להציג בצורה  $T(u) = Au$ , כאשר  $A$  אורתוגונלית.
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של העתקה אורתוגונלית הם  $\pm 1$ .  
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של מטריצה אורתוגונלית הם  $\pm 1$ .
- (5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.
- (6) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. תהי  $T: R^n \rightarrow R^n$  העתקה אורתוגונלית,  
ויהי  $\{u_1, \dots, u_n\}$  בסיס אורתונורמלי כלשהו של  $R^n$ .  
הוכיחו ש-  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  אף הוא בסיס אורתונורמלי של  $R^n$ .  
ב. תהי  $T: R^n \rightarrow R^n$  העתקה לינארית,  
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי  $\{u_1, \dots, u_n\}$  של  $R^n$ ,  
כך שגם הקבוצה  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  מהווה בסיס אורתונורמלי של  $R^n$ .  
הוכיחו כי  $T$  היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.
- ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה  $T$  :

- א.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקת השיקוף ביחס לישר  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ .
- ב.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקת השיקוף ביחס לישר  $y = \sqrt{3}x$ .
- ג.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקת הסיבוב בזווית  $30^\circ$  ב-  $\mathbb{R}^2$ .

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ב. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 \text{ג. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ד. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{array}$$

\* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- $\theta$  מעלות נגד כיוון השעון. מצאו נוסחה עבור ההעתקה  $T$ .

11) תהי  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקת השיקוף ביחס לישר  $y = \tan \frac{\theta}{2} x$ . מצאו נוסחה עבור ההעתקה  $T$ .

12) תהי  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקה אורתוגונלית. הוכיחו ש- $T$  היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.



## תשובות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

$$(8) \quad \text{א. } T(x, y) = \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \quad \text{ב. } T(x, y) = \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

$$\text{ג. } T(x, y) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

$$(9) \quad \text{א. שיקוף ביחס לישר } y = 0.4142x \quad \text{ב. שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

$$\text{ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{דרך II: שיקוף ביחס לישר } y = -\frac{1}{3}x$$

$$(10) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(12) שאלת הוכחה.

## דמיון ולכסון אורתוגונלי

### שאלות

- (1)  $A, B, C$  מטריצות ריבועיות.  
 הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:  
 א.  $A$  דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).  
 ב. אם  $A$  דומה אורתוגונלית ל- $B$  אז  $B$  דומה אורתוגונלית ל- $A$  (סימטריות).  
 ג. אם  $A$  דומה אורתוגונלית ל- $B$  ו- $B$  דומה אורתוגונלית ל- $C$  אז  $A$  דומה אורתוגונלית ל- $C$  (טרנזיטיביות).

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.  
 ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

- (3)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  .  
 לכסנו אורתוגונלית את המטריצה  
 כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית  $P$ , כך ש-  $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$ .

- (4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  .  
 לכסנו אורתוגונלית את המטריצה  
 כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית  $P$ , כך ש-  $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$ .

- (5)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  .  
 לכסנו אורתוגונלית את המטריצה  
 כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית  $P$ , כך ש-  $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$ .

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) א. שאלת הוכחה. ב.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$