# אלגברה ליניארית 2

## פרק 5 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

1. מטריצות אורתוגונליות ..... 1
2. העתקות אורתוגונליות ..... 6
3. דמיון ולכסון אורתוגונלי ..... 9

# מטריצות אורתוגונליות

## שאלות

**1)** ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

**2)** הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. מטריצה ריבועית $A$ היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^TA=I$.

ב. מטריצה אורתוגונלית $A$ היא הפיכה ומתקיים $A^{-1}=A^T$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $A$ מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות $A^T, A^{-1}$ אורתוגונליות.

ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.

ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא $1$ או $-1$.

ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

**4)** תהי $A$ מטריצה מסדר $n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. עמודותיה של המטריצה $A$ מהוות בסיס אורתונורמלי ל-$R^n$,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל-$R^n$.

ב. עמודותיה של המטריצה $A$ מהוות בסיס אורתוגונלי ל-$R^n$,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל-$R^n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $A$ מטריצה מסדר $n$, אשר עמודותיה, $\{v_1,...,v_n\}$, מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל-$R^n$. נסמן $v_iv_i=\lambda_i$.
הוכיחו כי $A^TA=\text{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\2&2&-\sqrt{8}\\-\sqrt{0.5}&\sqrt{0.5}&0\end{pmatrix}$.

**6)** הוכיחו את המשפט:
יהיו $B$ ו-$C$ שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב $R^n$.
אז מטריצת המעבר מ-$B$ ל-$C$ היא מטריצה אורתוגונלית.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $A$ מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי $B$ לבסיס $C$, של המרחב $R^n$.
הוכיחו כי אם $A$ מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס $C$ גם אורתונורמלי.

ב. תהי $A$ מטריצת המעבר מבסיס $B$ לבסיס אורתונורמלי $C$, של המרחב $R^n$.
הוכיחו כי אם $A$ מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס $B$ גם אורתונורמלי.

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם $A$ מטריצה אורתוגונלית מסדר $n$,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים $B$ ו-$C$, של המרחב $R^n$,
כך ש-$A$ משמשת מטריצת המעבר מ-$B$ ל-$C$.

ב. יהי $v\in R^n$, כך ש-$\|v\|=1$.
הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא הווקטור $v$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.
נגדיר $B = I + A$.
א. הוכיחו כי $B^2 = 2B$.
ב. ידוע ש- $|B| = 1024$.
מצאו את $n$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית $30^0$ ב- $R^2$.
ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- $R^2$.
ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$ ב- $R^2$.

**11)** בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.
א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$
ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**12)** הוכיחו שהמטריצה $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- $\theta$ מעלות נגד כיוון השעון, כאשר $0 \le \theta \le \pi$.
כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ לבין $Rv$ היא $\theta$.

**13)** נסמן: $\text{Ref}_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי:
א. $\text{Rot}_\theta \cdot \text{Rot}_\phi = \text{Rot}_{\theta+\phi}$
ב. $\text{Ref}_{\theta/2} \cdot \text{Ref}_{\phi/2} = \text{Rot}_{\theta-\phi}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** תהי $A_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.

הוכיחו ש- $A$ היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

**15)** יהי $v_{n\times 1}\in\mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.

נגדיר מטריצה $H_{n\times n}$ על ידי: $H=I-2v\cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).

הוכיחו:

א. $H$ מטריצה סימטרית.

ב. $H$ מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2=I$.

ג. המטריצה $H$ עבור $v=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y=-x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** א. שאלת הוכחה. ב. $n=10$

**10)** א. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

**11)** א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$.

ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. המטריצה מתארת סיבוב של $90^\circ$ במישור.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# העתקות אורתוגונליות

## שאלות

**1)** תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: $T$ אורתוגונלית $\Leftrightarrow \forall u\in R^n \ \|T(u)\|=\|u\|$.

**2)** תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי $T$ איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם $T^{-1}$ אורתוגונלית.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $A$ מטריצה אורתוגונלית מסדר $n$.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, על ידי $T(u)=Au$.
הוכיחו כי $T$ היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n\to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u)=Au$, כאשר $A$ אורתוגונלית.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם $\pm 1$.
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם $\pm 1$.

**5)** הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,...,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של $R^n$.
הוכיחו ש-$\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של $R^n$.
ב. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,...,u_n\}$ של $R^n$,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של $R^n$.
הוכיחו כי $T$ היא העתקה אורתוגונלית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

**8)** בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה $T$:

א. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית $30^0$ ב-$R^2$.

**9)** בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית.
השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

**10)** תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב-$\theta$ מעלות נגד כיוון השעון.
מצאו נוסחה עבור ההעתקה $T$.

**11)** תהי $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצאו נוסחה עבור ההעתקה $T$.

**12)** תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה אורתוגונלית.
הוכיחו ש-$T$ היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# דמיון ולכסון אורתוגונלי

## שאלות

**1)** $A,B,C$ מטריצות ריבועיות.
הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:

א. $A$ דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).

ב. אם $A$ דומה אורתוגונלית ל- $B$ אז $B$ דומה אורתוגונלית ל- $A$ (סימטריות).

ג. אם $A$ דומה אורתוגונלית ל- $B$ ו- $B$ דומה אורתוגונלית ל- $C$ אז $A$ דומה אורתוגונלית ל- $C$ (טרנזיטיביות).

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.

ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

**3)** לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&0&-1&-1\\-1&-1&0&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית $P$, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.

**4)** לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית $P$, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.

**5)** לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.
כלומר, מצא מטריצה אורתוגונלית $P$, כך ש- $P^TAP=D_{iagonal}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$

**3)** $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{6}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

**4)** $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

**5)** $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©