# פיזיקה מכניקה מספר קורס 4115010

## פרק 15 - מומנט התמד -

### תוכן העניינים

# אדטיביות:

## רקע

גוף קשיח:

הגדרה: המרחק בין כל שתי נקודות על הגוף תמיד קבוע.

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב **כל הנקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה המהירות הזוויתית** (אך לא באותה מהירות קווית)

מומנט התמד:

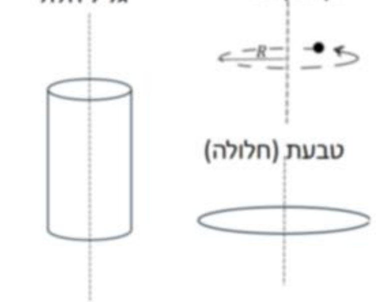
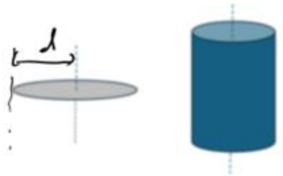
הגדרה - עבור מערכת של גופים נקודתיים $I = \Sigma m_i r_i^2$

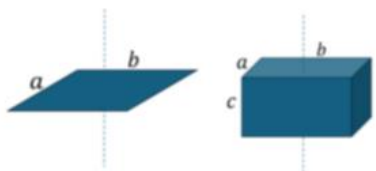
משפט שטיינר - $I' = I_{c.m.} + md^2$ כאשר $d$ הוא המרחק בין הצירים ו $m$ היא המסה הכוללת של הגוף

הערה: משפט שטיינר פועל רק לצירים מקבילים, ורק כאשר אחד הצירים עובר במרכז המסה.

אדטיביות - מומנט ההתמד הוא פונקציה אדטיבית, כלומר ניתן לסכום את המומנט התמד של כל חלק וחלק בגוף על מנת לקבל את המומנט הכולל. $I_T = I_1 + I_2$

נוסחאות מומנט התמד של גופים נפוצים :

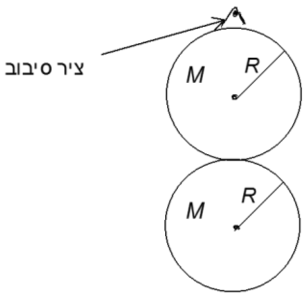
| | |
|---|---|
| גוף נקודתי סביב ציר כלשהו<br>$I = mR^2$<br>טבעת וגליל חלול סביב הציר המרכזי<br>$I_{c.m.} = mR^2$ |  |
| דיסקה/ גליל מלא במרכז מסה סביב ציר $z$- אנך לדיסקה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{2}mR^2$ |  |
| דיסקה במרכז מסה סביב ציר x -במישור הדיסקה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{4}mR^2$ |  |

| | |
|---|---|
| מוט במרכז המסה<br>$I_{c.m.} = \frac{1}{12}mL^2$ |  |
| מוט בקצה<br>$I = \frac{1}{3}mL^2$ |  |
| כדור מלא במרכז מסה<br>$I_{c.m.} = \frac{2}{5}mR^2$ |  |
| תיבה או לוח במרכז מסה<br>$I_{c.m.} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$ |  |

## שאלות:

**1) שעון כפול תלוי על קיר**

לדסקה בעלת מסה $M$ ורדיוס $R$ מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).




## תשובות סופיות:

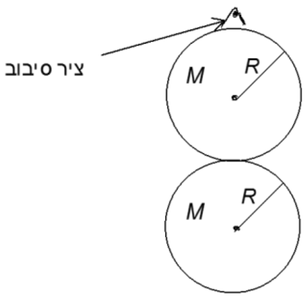
1) $I = 11mR^2$

# אדטיביות:

## שאלות:

**1) דוגמה**

לדסקה בעלת מסה $M$ ורדיוס $R$ מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).




## תשובות סופיות:

1) $I = 11mR^2$

## חישוב מומנט ההתמד באמצעות אינטגרלים:

### רקע

עבור גוף קשיח: $I = \int r^2 \, \mathrm{d}m$

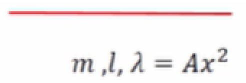
כאשר $r$ הוא המרחק של כל גוף מציר הסיבוב (ולא מהראשית)

אם ציר הסיבוב הוא ציר $z$ אז $r^2 = x^2 + y^2$

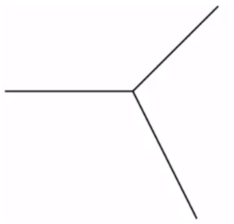
# תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד:

## שאלות:

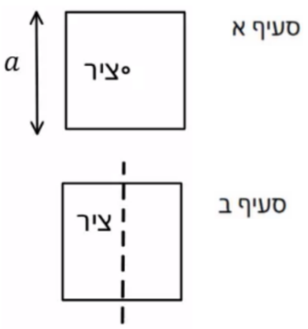

1) **חישוב אינטגרל של מוט לא אחיד**
חשב את מומנט ההתמד של מוט עם צפיפות ליחידת
אורך $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$ סביב קצה המוט.
$x$ הוא המרחק מהקצה, $L$ הוא אורך המוט ו- $\lambda_0$ נתון.




2) **חישוב נוסף מוט בצפיפות לא אחידה**
מצא את מומנט ההתמד של מוט סביב מרכזו לפי
הנתונים שבשרטוט.
הצפיפות הנתונה מתייחסת למרכז המוט כראשית הצירים.

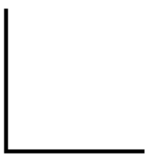


3) **שלושה מוטות מחוברים בקצה**
שלושה מוטות זהים באורך $l$ ומסה $m$ כל אחד מחוברים
באופן המוצג באיור.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר הנמצא
בנקודת החיבור בין המוטות ובמאונך למישור.



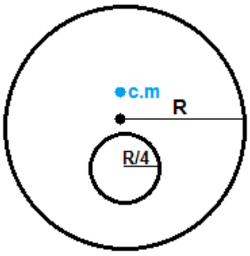

4) **מסגרת ריבועית**
נתונה מסגרת ריבועית בעלת אורך צלע $a$ ומסה $M$.
מצא את מומנט ההתמד של מסגרת.
א. סביב ציר העובר במרכזה ומאונך למישור המסגרת.
ב. סביב ציר העובר במרכז המסגרת ודרך מרכז שתי צלעות ומקביל לשתי הצלעות האחרות.

5) **מומנט התמד של שער חשמלי**
מצא את מומנט ההתמד של שער חשמלי בעל מסה $m$
ואורך $l$ אשר בסופו מחוברת משקולת בעלת מסה $M$
ואורך $L$ המסתובב סביב מרכז המסה שלו.



6) **מומנט התמד של ר"יש**
מצא את מומנט ההתמד של הגוף שבשרטוט סביב מרכז המסה
שלו בשתי דרכים שונות. אורך כל מוט $l$ ומסתו $m$.

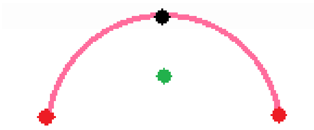
### 7) דיסקה עם חור




א. מצא את מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R, אם ידוע כי במרחק חצי R ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R. הדיסקה מסתובבת סביב ציר במרכזה (ולא במרכז המסה של המערכת).

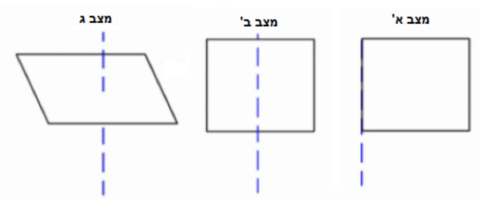
ב. מצא את מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו.

### 8) חצי חישוק ושתי מסות



מצא את מומנט ההתמד של חצי החישוק שבתמונה. רדיוסו R, מסתו M ובקצותיו חוברו שתי מסות m. החישוק סובב סביב מסמר בקודקודו.

### 9) חישוב אינטגרל של ריבוע



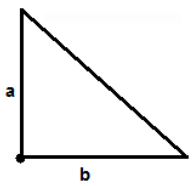

חשב את מומנט ההתמד של לוח ריבוע בעל אורך צלע $a$, מסה M וצפיפות אחידה בכל אחד מהמצבים הבאים:

א. ציר הסיבוב הוא אחת הפאות של הריבוע.

ב. ציר הסיבוב מקביל לפאות ועובר במרכז.

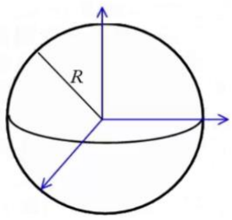
ג. ציר הסיבוב אנך למשטח הריבוע ועובר במרכז.

### 10) מומנט התמד של משולש




מצא את מומנט ההתמד של המשולש סביב קודקודו הישר.

### 11) מומנט התמד של כדור מלא




חשב את מומנט ההתמד של כדור מלא בעל רדיוס R, מסה M וצפיפות אחידה, סביב ציר העובר במרכז הכדור.

### 12) מומנט התמד של קליפה כדורית

מצאו את מומנט ההתמד של קליפה כדורית ברדיוס R ומסה m סביב ציר העובר דרך מרכז המסה של הקליפה.

## תשובות סופיות:

1) $I_0 = M\frac{L^2}{2}$

2) $I = \frac{12ml^2}{80}$

3) $I_{c.m.} = ml^2$

4) א. $I_{c.m.} = \frac{M}{4}\left(\frac{l^2}{3}+a^2\right)$ ב. $I = \frac{M}{8}\left(a^2+\frac{l^2}{3}\right)$

5) $$I=\left(\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{m\cdot 0+\frac{M(l+L)}{2}}{m+M}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{12}\left(L^2+L^2\right)M+M\left(\frac{l}{2}-\left(\frac{m\cdot 0+\frac{M(l+L)}{2}}{m+M}\right)+\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

6) $I = \frac{5}{12}ml^2$

7) א. $I_0 = \frac{247}{512}MR^2$ ב. $I_0 = I_{c.m.}+\frac{15}{16}M\cdot\left(\frac{R}{30}\right)^2$

8) $I_1 = I_{c.m.} + m'b^2$

9) א. $I = \frac{1}{3}Ma^2$ ב. $I = \frac{1}{12}Ma^2$ ג. $I = M\frac{1}{6}a^2$

10) $I_0 = \frac{1}{6}m\left(a^2+b^2\right)$

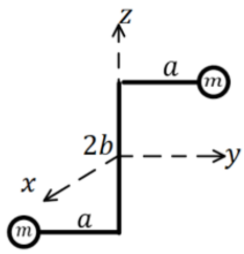
11) $I = \frac{2}{5}MR^2$

12) $\frac{2MR^2}{3}$

# מומנט ההתמד כמטריצה:

## שאלות:

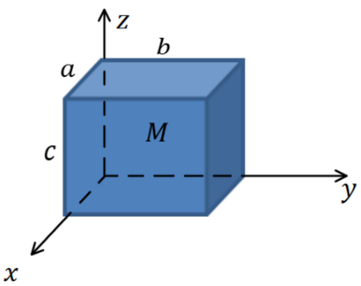
1) **דוגמה-מנואלה**




שתי מסות נקודתיות זהות m מחוברות על ידי מוטות חסרי מסה כפי שנראה באיור.
אורך המוט המרכזי הוא $2b$ ואורך כל מוט המחובר לכדור הוא $a$.

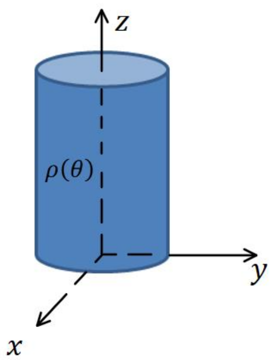
א. מצא את כל מטריצת מומנט ההתמד של המערכת.
ב. מצא את התנע הזוויתי של המערכת ברגע המתואר באיור אם המהירות הזוויתית היא $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$.

2) **דוגמה-מומנט התמד של קובייה**




חשב את המומנט התמד של קובייה בעלת מסה M המפולגת באופן אחיד.
ראשית הצירים נמצאת בפינת הקובייה,
צלעות הקובייה מקבילים לצירים
ואורכיהם: $c$, $b$, $a$. ראה איור.

3) **גליל עם צפיפות התלויה בזווית**




לגליל בעל רדיוס R וגובה H יש צפיפות מסה התלויה בזווית $\rho(\theta)=\rho_0(1+\sin\theta)$ כאשר $\theta$ היא הזווית ביחס לציר $x$ בקואורדינטות גליליות.

א. מהי המסה הכוללת של הגליל?
ב. מצא את מיקום מרכז המסה של הגליל.
ג. חשב את: $I_{yz}$, $I_{xz}$, $I_{zz}$.
ד. חשב את התנע הזוויתי של הגליל כאשר הוא מסתובב במהירות זוויתית $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$.
ה. מדוע יש הבדל בין התנע הזוויתי של הגליל בכיוונים $x$ ו- $y$.

## תשובות סופיות:

1) א. $I = 2m\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & -ab \\ 0 & -ab & a^2 \end{pmatrix}$ ב. $\vec{L} = -2mab\omega\hat{y} + 2ma^2\omega\hat{z}$

2) $I = M\begin{pmatrix} \frac{b^2c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix}$

3) א. $M = \rho_0\pi R^2 H$ ב. $y_{c.m.} = \frac{R}{3}\ ,\ x_{c.m.} = 0\ ,\ z_{c.m.} = \frac{H}{2}$

ג. $I_{zz} = \frac{\pi R^4 H\rho_0}{2}\ ,\ I_{xz} = 0\ ,\ I_{yz} = -\frac{\pi R^3 H^2\rho_0}{6}$

ד. $L_x = 0\ ,\ L_y = -\frac{\pi R^3 H^2\rho_0}{6}\omega\ ,\ L_z = \frac{\pi R^4 H\rho_0}{2}\omega$

ה. מכיוון שאנו מחשבים את התנ״ז רק ברגע מסוים והתפלגות המסה אינה סימטרית בין $x$ ל- $y$ אז יש הבדל בין התנ״ז של כל ציר.
במוצע של זמן מחזור שלם התנ״ז יהיה זהה לכל ציר.