

# ניתוח נתונים למנהלים

פרק 15 - מודלים לא ליניאריים

תוכן העניינים

1. כללי..... 1

## מודלים לא ליניאריים:

רקע:

הגמישות $\left(\frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y}\right)$ בכמה % ישתנה $Y$ אם נגדיל את $X$ ב-1%!	השינוי השולי $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)$ בכמה ישתנה $Y$ אם נגדיל את $X$ ביחידה!	משמעות ה- $\beta$	המודל
$\frac{\beta X}{Y}$	$\beta$	השינוי השולי אם נגדיל את $X$ ביחידה $Y$ ישתנה ב- $\beta$ יחידות	ליניארי: $Y = \alpha + \beta X + u$
$\beta X$	$\beta Y$	שיעור השינוי השולי אם נגדיל את $X$ ביחידה $Y$ ישתנה ב- $100 \cdot \beta\%$	חצי לוגריתמי: $\ln Y = \alpha + \beta X + u$ $(Y = e^{\alpha + \beta X + u})$
$\beta$	$\frac{\beta Y}{X}$	הגמישות אם נגדיל את $X$ ב-1% $Y$ ישתנה ב- $\beta\%$	לוגריתמי כפול: $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$ $(Y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$
$\frac{\beta}{Y}$	$\frac{\beta}{X}$	אין משמעות כלכלית אם נגדיל את $X$ ב-1% $Y$ ישתנה ב- $\beta$	לוג ליניארי: $Y = \alpha + \beta \ln X + u$ $(e^y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$

- המשתנה שיש בו  $LN$  השינוי בו יהיה באחוזים.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(e^x) = X$$

$$LN(X^Y) = Y \cdot LN(X)$$

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$

$$LN\left(\frac{X}{Y}\right) = LN(X) - LN(Y)$$

## שאלות:

(1) על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

$$. MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t \quad .1$$

$$. MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t \quad .2$$

$$. LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t \quad .3$$

$$. LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t \quad .4$$

א. הסבירו את המשמעות של  $\beta$  בכל אחד מהמודלים.

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311, 1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

(2) נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

$$. \hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05} \quad .1$$

$$. \hat{Y} = e^{4.5+0.05X} \quad .2$$

$$. \hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X} \quad .3$$

$$. \hat{Y} = \frac{1}{1 + e^{4.5+0.05X}} \quad .4$$

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור  $X = 6$ .

(3) נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

$$. Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i} \quad .1$$

$$. Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i} \quad .2$$

$$. Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i} \quad .3$$

$$. Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i \quad .4$$

$$. Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i \quad .5$$

$$. Q_i = e^{A + \beta_1 K_i + u_i} \quad .6$$

$$. Q_i = A \left( \frac{K_i}{2} + 7 \right)^{\beta_1} e^{u_i} \quad .7$$

$$. Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i \quad .8$$

$$. Q_i = A + \beta_1 \left( \frac{K_i}{L_i} \right) + u_i \quad .9$$

כאשר:

$Q$  - הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

$A$  - הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

$K$  - הכנסת הפרט.

$L$  - שנות לימוד.

- א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?
- ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?
- ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.
- ד. עקומת אנג'ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג'ל?

$$(4) \quad \text{נתון המודל הבא: } Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$$

- א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?
  - ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?
  - ג. נאמד המודל הבא:  $\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$ , והתקבלו התוצאות הבאות:  $\hat{\alpha}_0 = 3$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 0.8$ .
- מהם האומדנים עבור  $A$ ,  $\beta_1$ ?

- (5) נתון כי הקשר באוכלוסייה בין  $X$  ל- $Y$  נתון על ידי המודל הבא:  $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$ . נתון גם כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X}) \ln Y_t}{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X})^2} : \beta \text{ עבור } \beta$$

- א. האם האומדן ליניארי?
- ב. האם האומדן חסר הטיה?
- ג. האם האומדן *blue*?
- ד. מהי שונותו?

## תשובות סופיות:

(1) א.1. השינוי השולי. ב.2. אין משמעות כלכלית. ג.3. גמישות. ד.4. שיעור השינוי השולי.

א.1. 0.912 ב.2. 0.77 ג.3. 0.778 ד.4. 0.861

(2) א.1.  $\hat{\ln}(Y) = 4.5 + 0.05 \cdot \ln(X)$  ב.2.  $\hat{\ln}(Y) = 4.5 + 0.05X$

ג.3. אין צורך. ד.4.  $\ln\left(\frac{1-\hat{Y}}{\hat{Y}}\right) = 4.5 + 0.05X$

א.1. 98.45 ב.2. 121.51 ג.3. 4.50833 ד.4. 0.00816

(3) א. מודלים: 4, 5, 8 ו-9.

ב. מודלים: 1, 2, 6 ו-7.

ג.1. מסביר:  $\ln(K_i)$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ב.2. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ג.3. אינו ליניארי. ד.4. מסביר:  $\frac{1}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

ה.5. מסביר:  $\sqrt{K_i}$ , מוסבר:  $Q_i$  ז.6. מסביר:  $K_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ז.7. מסביר:  $K_i = \frac{K_i}{2} + 7$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ח.8. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $Q_i$

ט.9. מסביר:  $\frac{K_i}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

ד. מודלים: 1 ו-7.

(4) א. לא. ב.  $\ln(Q_i) = \ln(A) - \beta_1 \ln(K_i) + u_i$

ג.  $\beta_1 = -0.8$ ,  $A = 20$

(5) א. כן. ב. כן. ג. כן. ד.  $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{SS \ln x}$