אקונומטריקה למדעי הנתונים

פרק 28 - מודלים דינאמיים

תוכן העניינים

1. כללי 1

מודלים דינאמיים:

רקע:

מודל דינמי הוא מודל שיש בו משתנה מוסבר בפיגור, כלומר Y היום מושפע מ-Y של אתמול: $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$.

המכפילים הדינמיים:

שלוש סוגים של השפעות בהקשר של המודל הדינמי (מכפלים):

1. מכפל לטווח קצר (מיידי):
   איך X היום משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}$.
2. מכפל ביניים מסדר j (מכפיל דינמי):
   איך X מלפני j תקופות משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}$.
3. מכפל טווח ארוך (מצב עמיד):
   איך X משפיע על Y לאורך P תקופות: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*}$.

כאשר X ו-Y נותרים קבועים על פני הזמן (מצב עמיד):

$$Y_t = Y_{t-1} = \ldots = Y_{t-p} = Y^*$$
$$X_t = X_{t-1} = \ldots = X_{t-p} = X^*$$

הקשר בין מתאם סדרתי למודלים דינמיים

המתאם הסדרתי נובע מהשמטה של דינמיות מבנית במודל. המודל המקורי היה צריך להיות מודל דינמי אך נאמד בטעות מודל סטאטי. הדינמיות תבוא אז לידי ביטוי בטעויות, כלומר במתאם הסדרתי.
רגרסיית ההפרשים, המהווה פתרון למתאם הסדרתי, היא למעשה מודל דינמי.

לסיכום:
בכדי לפתור את בעיית המתאם הסדרתי יש לאמוד מלבד את המשתנה המוסבר בזמן t גם את המשתנה המוסבר והמסביר בזמן $t-1$.
המשתנה בפיגור Y_{t-1} נועד לפתור מתאם סדרתי מסדר ראשון, Y_{t-2} משמש לפתירת מתאם סדרתי מסדר שני וכך הלאה.
בכדי לבדוק קיומו של מתאם סדרתי במודל דינמי לא נוכל לבצע מבחן DW אלא רק מבחן LM.

השלכות על אר"פ של משתנה מוסבר בפיגור כמשתנה מסביר:

בניגוד למשתנה מסביר רגיל (X), Y_{t-1} הינו משתנה מקרי.
משום כך אר"פ ברגרסיה הכוללת משתנים כאלה הם מוטים (להזכירכם בהוכחת חוסר הטיה של האומדים השתמשנו בהנחה מס' 4 הגורסת כי המשתנים המסבירים אינם משתנים מקריים).
בנוסף לכך העקיבות של האומדים תלויה בקיום מתאם סדרתי:

$$\hat{\beta} \to \beta + \frac{COV\left(Y_{t-1}, u_t\right)}{V\left(Y_{t-1}\right)}.$$

אם אין מתאם סדרתי: $COV\left(Y_{t-1}, u_t\right) = 0$ $\Leftarrow$ האומד עקיב.

אם יש מתאם סדרתי: $COV\left(Y_{t-1}, u_t\right) \neq 0$ $\Leftarrow$ האומד איננו עקיב.

לסיכום – ההשלכות על אר"פ:

1. האומדים מוטים ולכן ניתן לבצע בדיקת השערות רק במדגמים גדולים (T>30).
2. אם אין מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים עקיבים ויעילים (ניתן לבצע בדיקת השערות במדגמים גדולים).
   אם יש מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים אינם עקיבים ואינם יעילים (לא ניתן לבצע בדיקת השערות גם במדגמים גדולים).

שאלות:

חישוב מכפלים:

1) חשבו את שלושת סוגי המכפלים של המודלים הדינמיים הבאים:

א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

ב. $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

תרגול מסכם:

2) המודל הבא הורץ ב-SAS עם מדגם בעל 100 תצפיות: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

א. מהפלט עולה DW=0.195 לפיכך:

i. לא קיים מתאם סדרתי.

ii. קיים מתאם סדרתי והוא:_____.

iii. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. לפי תשובתך לסעיף א' חווה דעתך על תכונות האומדים:

i. מוטים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ii. ליניאריים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iii. יעילים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iv. עקיבים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. אמידה של איזו משוואה תפתור באופן מלא את הבעיה שנוצרה במודל:

i. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$.

ii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-1} + u_t$.

iii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

ד. בדוק את ההשערה כי לפי מודל (3) השפעת X על Y הולכת ופוחתת עם הזמן.
מצורף החלק הרלוונטי מהפלט:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	0.42	0.06	7.00	0.000
X	1	0.25	0.03	8.33	0.000
Y1	1	0.85	0.05	17.00	0.000

ה. מהו המכפיל הדינמי בתקופה t-8?

3) הקשר בין כמות הכסף לבין רמת האינפלציה במשק נאמד בסדרה עתית על ידי המשוואה הבאה:

1. $M_t = \alpha + \beta \cdot P_t + U_t$.

כאשר:

M_t - כמות הכסף במשק בחודש t.

P_t - מדד המחירים לצרכן במשק בחודש t.

משוואה (1) נאמדה בפלט מס' 1.

א. לפי מבחן על הסטטיסטי DW, נראה כי ב- U_t:
   i. לא ניתן לחשב את הסטטיסטי DW מהנתונים הקיימים.
   ii. קיים מתאם סדרתי שלילי.
   iii. קיים מתאם סדרתי חיובי.
   iv. לא קיים מתאם סדרתי.
   v. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. סמנו את התשובה הנכונה בהכרח:
   i. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים.
   ii. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.
   iii. האומדים מוטים אך עקיבים.
   iv. האומדים חסרי הטיה, אך לא עקיבים.
   v. כל התשובות אינן נכונות.

ג. אומד השונות מוטה ובדיקת השערות
לא תקפה: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

חוקר טען כי הבעיה שנוצרה במשוואה (1) תיפתר ע"י אמידת המשוואה הבאה:

2. $M_t = \alpha_1 + \beta_1 \cdot P_t + \beta_2 \cdot M_{t-1} + \varepsilon_t$.

כאשר:

M_{t-1} - כמות הכסף בשנה הקודמת.

משוואה (2) נאמדה בפלט מס' 2, כמו כן נאמדה על ידי החוקר המשוואה המופיעה בפלט מס' 3.

ד. הרגרסיה המופיעה בפלט מס' 3 נועדה לבדיקת: _____.
במשוואה: _____.
על ידי מבחן: _____.
גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשום תוצאה מספרית): _____.

ה. לאור תשובתך לסעיף ד' טענת החוקר: נכונה/לא נכונה/אי אפשר לדעת

ו. האומד ל- β_1 במשוואה (2) הוא מוטה אך עקיב: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ז. ניתן להשתמש בסטטיסטי DW לבדיקת מתאם סדרתי במשוואה (2): נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת.

ח. חשבו את המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$.

ט. בדקו את הטענה כי המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$ $\left(\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-1}}\right)$ הינו 90% מהמכפיל המיידי בטווח הקצר.

י. רשמו את השערת האפס עבור הטענה כי המכפיל בט"א שווה ל-1 . מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבחינת ההשערה?

פלט מס' 1 – משוואה (1):

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	44.03828	44.03828	5145.80	<.0001
Error	103	0.88148	0.00856		
Corrected Total	104	44.91976			

Root MSE	0.09251	R-Square	0.9804
Dependent Mean	8.53854	Adj R-Sq	0.9802
Coeff Var	1.08344		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.49372	0.09862	15.15	<.0001
p	1	1.69267	0.02360	71.73	<.0001

Durbin-Watson D 0.208

פלט מס' 2 – משוואה (2):

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	42.19946	21.09973	15988.1	<.0001
Error	101	0.13329	0.00132		
Corrected Total	103	42.33275			

Root MSE	0.03633	R-Square	0.9969
Dependent Mean	8.55393	Adj R-Sq	0.9968
Coeff Var	0.42469		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.40374	0.06790	5.95	<.0001
m1	1	0.81811	0.03857	21.21	<.0001
p	1	0.28127	0.06633	4.24	<.0001

$M1 = M_{t-1}$

פלט מס' 3:

pendent Variable: res Residual RES = $\hat{\varepsilon}_t$ = (ב) שלמ אמידה מטוואה

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	0.00032896	0.00010965	0.08	0.9695
Error	99	0.13173	0.00133		
Corrected Total	102	0.13206			

Root MSE	0.03648	R-Square	0.0025
Dependent Mean	0.00033853	Adj R-Sq	-0.0277
Coeff Var	10775		

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	Intercept	1	0.03298	0.08192	0.40	0.6881
p		1	0.02640	0.07979	0.33	0.7415
m1		1	-0.01672	0.04705	-0.36	0.7230
res1		1	-0.01304	0.11039	-0.12	0.9062

RES1 = $\hat{\varepsilon}_{t-1}$

תשובות סופיות:

1) א. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}=0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}=\beta_1\beta_2^{j-1}$, מכפיל של הטווח הארוך: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*}=\beta_1\cdot\frac{1}{1-\beta_2}$.

ב. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}=\beta_0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}=\beta_2^{j-1}\left(\beta_1+\beta_0\beta_2\right)$, מכפיל של הטווח הארוך: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*}=\frac{\beta_1+\beta_0\beta_2}{1-\beta_2}$.

2) א. ii , חיובי. ב.i. לא נכון. ii. נכון. iii. לא נכון.
iv. נכון. ג. ii. ד. יש עדות לכך.
ה. $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}=0.068$.

3) א. iii. ב. i. ג. נכון.
ד. קיום מתאם סדרתי במשוואה (2).
מבחן LM.
$LM_{stat}=0.2575$.

ה. נכונה. ו. נכון. ז. לא נכון. ח. $\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-i}}=\beta_1\beta_2^i$.

ט. יש עדות לכך. י. $H_0:\beta_1=1-\beta_2$, WALD.