

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

פרק 29 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. מבחן מאן וויטני - שימוש בפלטים 1
2. מבחן קרוסקל ווליס - ניתוח פלטים 5
3. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים 9
4. מבחן פישר 16
5. מבחן פישר - קירוב נורמלי 20

מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

ניתוח פלטים במבחן מן-וויטני – רקע

מבחן מן-וויטני מיועד לבדוק האם לשתי אוכלוסיות התפלגות שווה. המבחן בוחן באופן רוחבי את כל תחום הערכים ולא מתמקד בערך מרכזי אחד. נשתמש במבחן זה כאשר יש שני מדגמים בלתי תלויים והמשתנה הכמותי הנחקר אינו מתפלג נורמלית או שמדובר במשתנה מסולם סדר. המבחן מתבסס על דירוג כל התצפיות. בעצם, מבחן זה הוא המענה האפרמטרי למבחן הפרמטרי להפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

להלן תוצאות הערכות שקיבלו שני מורים: ד"ר A ופרופסור B. סטודנטים נתנו משוב כללי על המורים בסקלה של 1 (גרוע) עד 5 (מצוין). הטענה היא שד"ר A הוא מרצה טוב יותר מאשר פרופסור B.

Mann-Whitney Test

Ranks

| | teacher | N | Mean Rank | Sum of Ranks |
|-------|---------|----|-----------|--------------|
| grade | dr A | 17 | 25.00 | 425.00 |
| | prof B | 20 | 13.90 | 278.00 |
| | Total | 37 | | |

Test Statistics^a

| | grade |
|--------------------------------|-------------------|
| Mann-Whitney U | 68.000 |
| Wilcoxon W | 278.000 |
| Z | -3.249 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .001 |
| Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)] | .001 ^b |

a. Grouping Variable: teacher

b. Not corrected for ties.

- הסבירו מדוע נעשה כאן מבחן מן-וויטני.
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 1%?

שאלות

1) מחקרים טוענים שקיים הבדל בין שעות השינה של גברים לשעות השינה של נשים. כיוון שלא ניתן להוכיח ששעות שינה הינו משתנה המתפלג נורמלית ביצעו מבחן מן-וויטני בו לקחו נשים וגברים אקראיים ובדקו את שעות השינה שלהם.

| Ranks | | | | |
|-----------|--------|-----|-----------|--------------|
| | gender | N | Mean Rank | Sum of Ranks |
| sleeptime | male | 10 | ??? | 135.00 |
| | female | ??? | 7.50 | 75.00 |
| | Total | 20 | | |

Mann-Whitney Test

| Test Statistics ^a | |
|------------------------------|-----------|
| | sleeptime |
| Mann-Whitney U | 20.000 |
| Wilcoxon W | 75.000 |
| Z | -2.319 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .020 |

- א. השלימו את סימני השאלה החסרים בפלט.
- ב. מהי המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- ג. מה הייתה מובהקות התוצאה אם טענת המחקר הייתה שגברים ישנים יותר מנשים?

2) שני אנשים נתבקשו לבדוק את מספר תאונות הדרכים בשבוע בשני קטעי כביש שונים. כל אחד בחר את השבועות באופן אקראי ובלתי תלוי באחר וספר כמה תאונות היו בכל כביש בשבוע. הפלטים שהתקבלו:

מספר תאונות

| | Frequency |
|-------|-----------|
| .00 | 2 |
| 1.00 | 1 |
| 2.00 | 2 |
| 3.00 | 1 |
| Total | 6 |

a. road = 1.00

מספר תאונות

| | Frequency |
|-------|-----------|
| .00 | 2 |
| 1.00 | 1 |
| 2.00 | 1 |
| 3.00 | 1 |
| 4.00 | 1 |
| 5.00 | 1 |
| Total | 7 |

a. road = 2.00

Ranks

| | road | N | Mean Rank | Sum of Ranks |
|-------------|-------|---|-----------|--------------|
| מספר תאונות | 1.00 | A | B | C |
| | 2.00 | D | E | F |
| | Total | G | | |

Test Statistics^a

| | VAR00002 |
|------------------------|----------|
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .465 |

- א. השלימו בטבלה השלישית את המספרים החסרים במקום האותיות.
- ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שאין הבדל בין הכבישים מבחינת התפלגות תאונות הדרכים?
- ג. כיצד הייתה משתנה התשובה של הסעיף הקודם אם כל חוקר היה מוסיף נתונים על שבוע נוסף לכל כביש?
- ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שכביש מספר 1 עם התפלגות תאונות גבוהה יותר מאשר כביש מספר 2?

תשובות סופיות

- (1) א. 10, 13.5 ב. נדחה H_0 ג. 0.01
- (2) א. 6, 6.17, 7, 7.71, 13, 54 ב. 0.465
- ג. לא ניתן לדעת. ד. לא נדחה H_0 ה. 0.7675

מבחן קרוסקל וואליס – ניתוח פלטים – רקע

כאשר לא ניתן לבצע מבחן ניתוח שונות חד כיווני (למשל, כאשר השונויות לא שוות, המשתנה התלוי אינו מתפלג נורמאלי או המשתנה התלוי נמדד בסולם סדר) נבחר במבחן לא-פרמטרי להשוואת k קבוצות בלתי תלויות.

מבחן Kruskal-Wallis הוא מבחן אפרמטרי להשוואת מספר אוכלוסיות בלתי תלויות. מבחן מן-וויטני הינו מקרה פרטי של מבחן Kruskal-Wallis כאשר יש שתי קבוצות בלתי תלויות.

השערות המבחן:

- השערת האפס: אין הבדל בין הקבוצות הנבדקות.
- השערת המחקר: קיים הבדל בין 2 קבוצות לפחות.

מבחן זה מתבסס על דירוג כלל התצפיות במחקר מכל המדגמים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השוו את שביעות הרצון מהשירות של 4 חברות טלפון סלולרי שונות. שביעות הרצון הוא ציון שהלקוח היה צריך לתת לרמת השירות של החברה מ-1 ועד 10.

- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר זה?
- מהן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי במקרה זה?
- מה מסקנות המחקר ברמת מובהקות של 5%?

Count

| | | company | | | | Total |
|-------------|-------|---------|----|---|---|-------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| שביעות רצון | 4.00 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| | 5.00 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 6.00 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| | 7.00 | 2 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| | 8.00 | 1 | 2 | 2 | 2 | 7 |
| | 9.00 | 1 | 1 | 3 | 2 | 7 |
| | 10.00 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| Total | | 7 | 10 | 6 | 5 | 28 |

Kruskal-Wallis Test

Ranks

| | company | N | Mean Rank |
|-------------|---------|----|-----------|
| שביעות רצון | 1 | 7 | 13.93 |
| | 2 | 10 | 11.40 |
| | 3 | 6 | 18.50 |
| | 4 | 5 | 16.70 |
| | Total | 28 | |

Test Statistics^{a,b}

| | שביעות רצון |
|-------------|-------------|
| Chi-Square | 3.363 |
| df | 3 |
| Asymp. Sig. | .339 |

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: company

שאלות

1) מחקר פסיכולוגי רצה להשוות 3 טיפול שונים לטיפול בחרדה. נלקחו נבדקים הסובלים מחרדה. הם חולקו באקראי ל-3 קבוצות וכל קבוצה קיבלה שיטת טיפול אחרת לחרדה. להלן תוצאות המבחן הסטטיסטי שבוצע:

Kruskal-Wallis Test

Ranks

| | group | N | Mean Rank |
|---------|-------|---|-----------|
| anxiety | 1.00 | 8 | 15.88 |
| | 2.00 | 4 | 6.88 |
| | 3.00 | 8 | 6.94 |

Test Statistics^{a,b}

| | anxiety |
|-------------|---------|
| Chi-Square | 11.149 |
| df | 2 |
| Asymp. Sig. | .004 |

- א. כמה נבדקים השתתפו במחקר?
 ב. באיזו שיטת טיפול רמת החרדה הייתה הנמוכה ביותר במדגם?
 ג. האם, עבור ר"מ 0.05, יש הבדל ברמת החרדה המתקבלת בשיטות הטיפול השונות?

2) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים לשלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים שלהלן הוזנו לתוכנה סטטיסטית, והתקבלו התוצאות הבאות:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | מינון |
| 72 | 73 | 75 | 67 | 68 | 82 | 82 | 82 | 76 | 79 | 79 | 81 | 83 | 87 | 87 | דופק |

Kruskal-Wallis Test

Ranks

| | dosage | N | Mean Rank |
|-------|--------|---|-----------|
| pulse | 10.00 | A | E |
| | 20.00 | B | F |
| | 30.00 | C | G |
| | Total | D | |

Test Statistics^{a,b}

| | pulse |
|-------------|--------|
| Chi-Square | 10.204 |
| df | 2 |
| Asymp. Sig. | .006 |

- השלימו את המספרים החסרים במקום האותיות A עד G בטבלת הדירוגים.
- בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת הדופק של האנשים?
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

תשובות סופיות

- א. 20 ב. מדגם 2 ג. נדחה H_0 .
- א. 3, 9.3, 11.7, 5, 5, 5, 15 ב. נדחה H_0 . ג. לא תשתנה.

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים. מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

דוגמה:

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת B. פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20. מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

| שיטה A | שיטה B |
|--------|--------|
| 16 | 14 |
| 17 | 14 |
| 20 | 19 |
| 10 | 9 |
| 18 | 8 |

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:

- נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
- נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
- נחשב את W_1 - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,
- נחשב את W_2 - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
- נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} \quad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

- הסטטיסטי U: במבחן דו צדדי $U = \min(U_1, U_2)$ במבחן חד צדדי U יהיה ה- U_i , שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.
 טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את
 ה- U הסטטיסטי.

טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של U שנסמן ב- U_c .

| טבלה מהסוג השני | טבלה מהסוג הראשון |
|---|--|
| n_1 או $n_2 \geq 9$ | $n_1 - n_2 \leq 8$ |
| נותנת את הערך הקריטי U_c כל הכרעה: נדחה את H_0 אם $U \leq U_c$ | עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את P_v אם $P_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 . |

דוגמה:

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים
 $n_2 = 3$

| u | n_1 | | |
|----|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.250 | 0.100 | 0.050 |
| 12 | 0.500 | 0.200 | 0.100 |
| 3 | 0.750 | 0.400 | 0.200 |
| 4 | | 0.600 | 0.350 |
| 5 | | | 0.500 |
| | | | 0.650 |

 $n_2 = 4$

| u | n_1 | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0.200 | 0.067 | 0.028 | 0.014 |
| 1 | 0.400 | 0.133 | 0.057 | 0.029 |
| 2 | 0.600 | 0.267 | 0.114 | 0.057 |
| 3 | | 0.400 | 0.200 | 0.100 |
| 4 | | 0.600 | 0.314 | 0.171 |
| 5 | | | 0.429 | 0.243 |
| 6 | | | 0.571 | 0.343 |
| 7 | | | | 0.443 |
| 8 | | | | 0.557 |

 $n_2 = 5$

| u | n_1 | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0.167 | 0.047 | 0.018 | 0.008 | 0.004 |
| 1 | 0.333 | 0.095 | 0.036 | 0.016 | 0.008 |
| 2 | 0.500 | 0.190 | 0.071 | 0.032 | 0.016 |
| 3 | 0.667 | 0.286 | 0.125 | 0.056 | 0.028 |
| 4 | | 0.429 | 0.196 | 0.095 | 0.048 |
| 5 | | 0.571 | 0.286 | 0.143 | 0.075 |
| 6 | | | 0.393 | 0.206 | 0.111 |
| 7 | | | 0.500 | 0.278 | 0.155 |
| 8 | | | 0.607 | 0.365 | 0.210 |
| 9 | | | | 0.452 | 0.274 |
| 10 | | | | 0.548 | 0.345 |
| 11 | | | | | 0.421 |
| 12 | | | | | 0.500 |
| 13 | | | | | 0.579 |

$$n_2 = 6$$

| u | n_1 | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0.143 | 0.036 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 1 | 0.286 | 0.071 | 0.024 | 0.010 | 0.004 | 0.002 |
| 2 | 0.428 | 0.143 | 0.048 | 0.019 | 0.009 | 0.004 |
| 3 | 0.571 | 0.214 | 0.083 | 0.033 | 0.015 | 0.008 |
| 4 | | 0.321 | 0.131 | 0.057 | 0.026 | 0.013 |
| 5 | | 0.429 | 0.190 | 0.086 | 0.041 | 0.021 |
| 6 | | 0.571 | 0.274 | 0.129 | 0.063 | 0.032 |
| 7 | | | 0.357 | 0.176 | 0.089 | 0.047 |
| 8 | | | 0.452 | 0.238 | 0.123 | 0.066 |
| 9 | | | 0.548 | 0.305 | 0.165 | 0.090 |
| 10 | | | | 0.381 | 0.214 | 0.120 |
| 11 | | | | 0.457 | 0.268 | 0.155 |
| 12 | | | | 0.545 | 0.331 | 0.197 |
| 13 | | | | | 0.396 | 0.242 |
| 14 | | | | | 0.465 | 0.294 |
| 15 | | | | | 0.535 | 0.350 |
| 16 | | | | | | 0.409 |
| 17 | | | | | | 0.469 |
| 18 | | | | | | 0.531 |

$$n_2 = 7$$

| u | n_1 | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 0.125 | 0.028 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 1 | 0.250 | 0.056 | 0.017 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 2 | 0.375 | 0.111 | 0.033 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 3 | 0.500 | 0.167 | 0.058 | 0.021 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.625 | 0.250 | 0.092 | 0.036 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | | 0.333 | 0.133 | 0.055 | 0.024 | 0.011 | 0.006 |
| 6 | | 0.444 | 0.192 | 0.082 | 0.037 | 0.017 | 0.009 |
| 7 | | 0.556 | 0.258 | 0.115 | 0.053 | 0.026 | 0.013 |
| 8 | | | 0.333 | 0.158 | 0.074 | 0.037 | 0.019 |
| 9 | | | 0.417 | 0.206 | 0.101 | 0.051 | 0.027 |
| 10 | | | 0.500 | 0.264 | 0.134 | 0.069 | 0.036 |
| 11 | | | 0.583 | 0.324 | 0.172 | 0.090 | 0.049 |
| 12 | | | | 0.394 | 0.216 | 0.117 | 0.064 |
| 13 | | | | 0.464 | 0.265 | 0.147 | 0.082 |
| 14 | | | | 0.538 | 0.319 | 0.183 | 0.104 |
| 15 | | | | | 0.378 | 0.223 | 0.130 |
| 16 | | | | | 0.438 | 0.267 | 0.159 |
| 17 | | | | | 0.500 | 0.314 | 0.191 |
| 18 | | | | | 0.562 | 0.365 | 0.228 |
| 19 | | | | | | 0.418 | 0.267 |
| 20 | | | | | | 0.473 | 0.310 |
| 21 | | | | | | 0.527 | 0.355 |
| 22 | | | | | | | 0.402 |
| 23 | | | | | | | 0.451 |
| 24 | | | | | | | 0.500 |
| 25 | | | | | | | 0.549 |

$$n_2 = 8$$

| u | n_1 | | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0.111 | 0.022 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.222 | 0.044 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.333 | 0.089 | 0.024 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.444 | 0.133 | 0.042 | 0.014 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 4 | 0.556 | 0.200 | 0.067 | 0.024 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | | 0.267 | 0.097 | 0.036 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 6 | | 0.356 | 0.139 | 0.055 | 0.023 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 7 | | 0.444 | 0.188 | 0.077 | 0.033 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 8 | | 0.556 | 0.248 | 0.107 | 0.047 | 0.021 | 0.010 | 0.005 |
| 9 | | | 0.315 | 0.141 | 0.064 | 0.030 | 0.014 | 0.007 |
| 10 | | | 0.387 | 0.184 | 0.085 | 0.041 | 0.020 | 0.010 |
| 11 | | | 0.461 | 0.230 | 0.111 | 0.054 | 0.027 | 0.014 |
| 12 | | | 0.539 | 0.285 | 0.142 | 0.071 | 0.036 | 0.019 |
| 13 | | | | 0.341 | 0.177 | 0.091 | 0.047 | 0.025 |
| 14 | | | | 0.404 | 0.217 | 0.114 | 0.060 | 0.032 |
| 15 | | | | 0.467 | 0.262 | 0.141 | 0.076 | 0.041 |
| 16 | | | | 0.533 | 0.311 | 0.172 | 0.095 | 0.052 |
| 17 | | | | | 0.362 | 0.207 | 0.116 | 0.065 |
| 18 | | | | | 0.416 | 0.245 | 0.140 | 0.080 |
| 19 | | | | | 0.472 | 0.286 | 0.168 | 0.097 |
| 20 | | | | | 0.528 | 0.331 | 0.198 | 0.117 |
| 21 | | | | | | 0.377 | 0.232 | 0.139 |
| 22 | | | | | | 0.426 | 0.268 | 0.164 |
| 23 | | | | | | 0.475 | 0.306 | 0.101 |
| 24 | | | | | | 0.525 | 0.347 | 0.221 |
| 25 | | | | | | | 0.389 | 0.253 |
| 26 | | | | | | | 0.433 | 0.287 |
| 27 | | | | | | | 0.478 | 0.323 |
| 28 | | | | | | | 0.522 | 0.360 |
| 29 | | | | | | | | 0.399 |
| 30 | | | | | | | | 0.439 |
| 31 | | | | | | | | 0.480 |
| 32 | | | | | | | | 0.520 |

טבלה למציאת U_c

ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים.

| n_1 | n_2 | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |

שאלות

- (1) מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק.

| קבוצה א | קבוצה ב |
|---------|---------|
| 68 | 82 |
| 82 | 74 |
| 78 | 82 |
| 94 | 64 |
| 87 | 67 |
| | 65 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

- (2) מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

- (3) במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:
 קבוצת הטיפול: 1, 3, 9, 3, 4, 0, 8, 12, 16.
 קבוצת הביקורת: 19, 7, 28, 13, 23, 12.
 בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את H_0 .
 (2) נדחה את H_0 .
 (3) לא נדחה את H_0 .

\\

מבחן פישר – רקע

מבחן זה הוא מבחן הנכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים. משתמשים במבחן כאשר מתעניינים להשוות בין שתי אוכלוסיות והמשתנה התלוי הוא דיכוטומי, כלומר משתנה שיש לו שני ערכים אפשריים. במבחן זה יוצרים מדגם אחד שמקבל טיפול כלשהו ומדגם אחר המהווה קבוצת ביקורת ואינו מקבל את הטיפול. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת שתי פרופורציות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. במבחן הפרמטרי דורשים שבכל מדגם מספר ההצלחות וגם מספר הכישלונות יהיה לפחות 10 (הפחות מחמירים דורשים לפחות 5).

מבחן פישר, אותו נעשה בפרק זה, נקרא בספרות המקצועית: "Fisher exact probability test".

דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים בקורס סטטיסטיקה. נלקחו 2 כיתות הלומדות סטטיסטיקה בנות 15 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת ניתנו שיעורי עזר ובכיתה השנייה לא ניתנו שיעורי עזר. בכיתה בה ניתנו שיעורי עזר 1 נכשל בקורס ובכיתה שבה לא ניתנו שיעורי עזר 3 נכשלו בקורס. מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן פישר היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$. מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס. כדי לחשב את מובהקות התוצאה נבנה טבלת שכיחות משותפת במבנה הבא:

| סה"כ | "הצלחה" | "כישלון" | |
|------|---------|----------|--------------|
| A+B | B | A | קבוצת טיפול |
| C+D | D | C | קבוצת ביקורת |
| N | B+D | A+C | סה"כ |

בנו את טבלת השכיחות המשותפת המתאימה לדוגמה:

| סה"כ | | | |
|------|-----|-----|--------------|
| A+B | B | A | קבוצת טיפול |
| C+D | D | C | קבוצת ביקורת |
| N | B+D | A+C | סה"כ |

דוגמה:

בהנחת השערת האפס התפלגות של A הינו משתנה מקרי היפר גיאומטרי שבו יש אוכלוסייה בגודל N , מתוכם $C + A$ "מיוחדים" ואנו דוגמים מתוכם מדגם בגודל $B + A$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפר גיאומטרית במקרה זה,

$$\text{כאשר } X \text{ מייצג את השכיחות } A \text{ תהיה: } \frac{\binom{A+C}{x} \binom{B+D}{A+B-x}}{\binom{N}{A+B}}$$

חשבו את מובהקות התוצאה בדוגמה ומה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

(1) פסיכיאטרים נשאלו האם תרופה אנטי דיכאונית מסוימת אכן משפיעה על מצב הרוח. נלקחו 28 אנשים שהתלוננו על דיכאון ברמה דומה והם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 16 נטלו את התרופה האנטי דיכאונית הנחקרת והיתר היוו קבוצת ביקורת ונטלו פלסיבו. כעבור 3 חודשים נבדק מצבם הנפשי של כל משתתפי המחקר. בקרב אלו שנטלו את התרופה רק 2 התלוננו על דיכאון ובקרב אלו שנטלו הפלסבו 6 התלוננו על דיכאון. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

(2) חנות פרחים מעוניינת לבדוק את הטענה שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים. נדגמו 20 פרחים מאותו סוג. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות: 10 פרחים יהיו בקבוצת הניסוי, כלומר בתאורה אולטרה סגולה והפרחים הנותרים יהיו בקבוצת הביקורת – באותם התנאים בדיוק אך ללא תאורה אולטרה סגולה. כעבור 5 ימים נבדקו כלל הפרחים.

| תקין | נבול | תאורה / מצב הפרח לאחר 5 ימים |
|------|------|------------------------------|
| 9 | 1 | אולטרה סגולה |
| 3 | 7 | רגילה |

א. מה היא רמת המובהקות המינימלית עבורה יוסק שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים?
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם בקבוצת הביקורת היו נמצאים פחות פרחים נבולים?

(3) משרד החינוך הזמין מחקר שמטרתו היה לבדוק האם שנת צהריים קבועה בזמן לימודי התיכון משפיעה על הזכאות לבגרות. נדגמו בוגרי תיכון אקראיים שנשאלו שתי שאלות:
 Q1 - האם בזמן התיכון נהגת לישון צהריים באופן קבוע?
 Q2 - האם את/ה זכאית לתעודת בגרות?
 להלן התוצאות שהתקבלו.
 א. רשמו את השערות המבחן. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
 ב. מהי מובהקות התוצאה?
 ג. בדקו את השערות המחקר ברמת מובהקות של 6%.

| שאלון/ מספר שאל | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Q1 | כן | לא | לא | לא | כן | כן | לא | לא | לא | לא | לא | כן | לא | לא |
| Q2 | כן | כן | כן | לא | לא | כן | לא | לא | כן | כן | לא | כן | כן | לא |

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0099. ב. תקטן.
- (3) א. מבחן פישר. ב. 0.8112. ג. לא נדחה H_0 .

קירוב נורמלי למבחן פישר – רקע

כאשר המדגמים גדולים דיו ניתן לבצע קירוב נורמלי למבחן פישר. אחד מכללי האצבע לקרוב הנורמלי אם כל ארבעת הביטויים הבאים גדולים מ-7.5:

$$\frac{(A+C)^2}{N} \quad \frac{(B+D)^2}{N} \quad \frac{(A+B)^2}{N} \quad \frac{(D+C)^2}{N}$$

אך יתכן שחוקרים שונים ישתמשו בכללי אצבע אחרים. נתייחס ל- A בתור משתנה מקרי המתפלג נורמלית עם התוחלת והשונות הבאות:

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{(A+B)(A+C)}{N} V(A) \\ &= \frac{(A+B)(A+C)(B+D)(C+D)}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים. נלקחו 2 כיתות בנות 40 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת נתנו שיעורי עזר ובכיתה שנייה לא נתנו שיעורי עזר. בכיתה שנתנו שיעורי עזר 10 נכשלו ובכיתה ללא שיעורי עזר 16 נכשלו. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

- (1) כדי לבדוק אם חיסון חדש לכלבים מסייע בהפחתת ההדבקות במחלה מסוימת, נערך ניסוי שבו 50 כלבים קיבלו חיסון ו-50 לא קיבלו חיסון. מבין הכלבים שחוסנו 10 כלבים נדבקו במחלה, ומבין הכלבים שלא חוסנו 18 נדבקו במחלה. מהי המסקנה ברמת מובהקות 0.05?
- (2) מחקר מעוניין לבדוק האם אכילת שוקולד משפיעה על רמת הסרטונין בדם. נלקחו 102 אנשים ברמת בריאות דומה. הם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 52 קיבלו שוקולד ו-50 לא. בדקו את רמת הסרטונין בדם בשתי הקבוצות: בקבוצת השוקולד ל-18 אנשים הייתה רמת סרטונין הנחשבת לגבוהה. בקבוצה שלא קבלה שוקולד ל-11 הייתה רמת סרטונין הנחשבת לגבוהה. א. מהי רמת המובהקות המינימלית לדחיית השערת האפס? ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

- (1) נדחה H_0 .
- (2) א. 1 ב. לא נדחה H_0 .