

DE Anze college phys 4B

פרק 1 - מבוא מתמטי

תוכן העניינים

1. וקטורים..... 1
2. אינטגרל כפול ומשולש..... 3
3. צפיפות מטען..... 5
4. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים..... 6
5. אופרטור הנאבלה..... 9

וקטורים:

רקע:

וקטור יחידה:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

מכפלה סקלרית:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

מציאת זווית בין וקטורים:

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

מכפלה וקטורית:

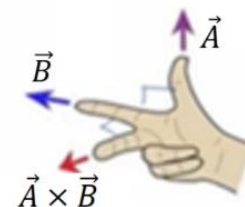
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$$

כיוון לפי כלל יד ימין -



יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג -



מסובבים את האצבעות מ- \vec{A} ל- \vec{B} והתוצאה בכיוון האגודל.

בחירת מערכת צירים:

במערכת צירים צריך להתקיים: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$.

זהויות:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = \vec{B}(\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D})$$

אינטגרל כפול ומשולש:

שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

- | | |
|--|---------------|
| $\int_0^3 \int_0^2 3 \cdot x^3 y^2 dx dy$ | 1 דוגמה (1) |
| $\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y) dx dy$ | 2 דוגמה (2) |
| $\int_0^2 \int_1^3 (x^2 + y) dy dx$ | 3 דוגמה (3) |
| $\int_0^1 \int_0^2 x \cdot z^2 dx dz$ | 4 דוגמה (4) |
| $\int_1^5 \int_0^4 2 \cdot y^3 dy dz$ | 5 דוגמה (5) |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta$ | 6 דוגמה (6) |
| $\int_a^b \int_0^c 4 \cdot x^2 y dx dy$ | 7 דוגמה (7) |
| $\int_a^b \int_0^c (4z + r^2) dr dz$ | 8 דוגמה (8) |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4a \cdot r^2 dr d\theta$ | 9 דוגמה (9) |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4yr^2 dr d\theta$ | 10 דוגמה (10) |
| $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ | 11 דוגמה (11) |

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (zx^2 + 3y) dy dx dz$$

12 דוגמה – אינטגרל משולש

תשובות סופיות:

108 (1)

18 (2)

13.33 (3)

$\frac{2}{3}$ (4)

512 (5)

56.55 (6)

$\frac{4c^3}{3} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$ (7)

$2cb^2 + \frac{c^3}{3}b - 2ca^2 - \frac{a^3}{3}$ (8)

$\frac{4aR^3}{3} 2\pi$ (9)

$\frac{8\pi yR^3}{3}$ (10)

$4\pi r^2$ (11)

39 (12)

צפיפות מטען:

רקע:

צפיפות נפחית – כמות המטען ביחידת נפח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל- $\rho = \frac{Q}{V}$.

צפיפות משטחית – כמות המטען ביחידת שטח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל- $\sigma = \frac{Q}{S}$.

צפיפות אורכית – כמות המטען ביחידת אורך.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל- $\lambda = \frac{Q}{L}$.

אלמנט מטען אינפיטיסימלי:

$$dq = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$$

שאלות:

(1) תרגיל - דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

(2) תרגיל – מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען: $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$.

תשובות:

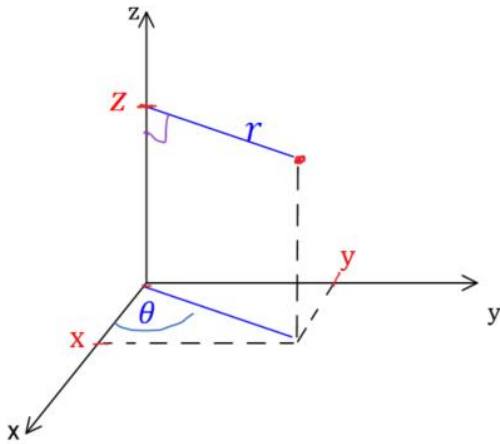
$$Q \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (1)$$

$$\rho_0 \pi R^3 \quad (2)$$

קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים:

רקע:

קואורדינטות גליליות: (r, θ, z)



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

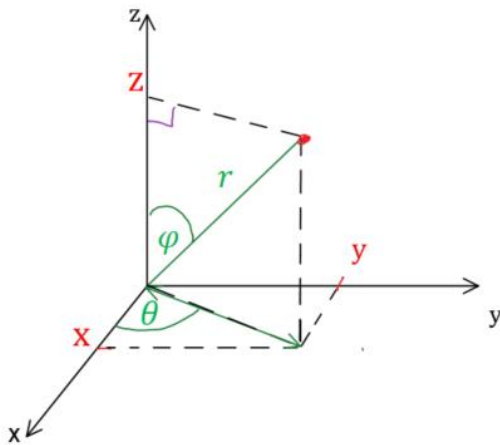
$$dl = r d\theta / dr / dz$$

דיסקה ^{מעטפת} _{גלילית}

$$dS = r d\theta dr / r d\theta dz / dr dz$$

גליל מלא

$$dV = r d\theta dr dz$$



קואורדינטות כדוריות: (r, θ, φ)

$$z = r \cos \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

שאלות:

- (1) **שטח מעגל**
 חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.
- (2) **חישוב נפח גליל**
 חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

$$S = \pi R^2 \quad (1)$$

$$V = \pi R^2 h \quad (2)$$

אופרטור נאבלה:

רקע:

$$\vec{\nabla} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

כדוריות	גליליות	קרטזיות	
$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	grad $\vec{\nabla} f$
$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \sin \varphi)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$
$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$	$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y}$ $+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$	Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

זהויות:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f + g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla}(\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ \vec{\nabla}(f \cdot g) &= (\vec{\nabla}f) \cdot g + (\vec{\nabla}g) \cdot f \\ \vec{\nabla}(f \cdot \vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}f) \end{aligned}$$