פיזיקה 1ב למדעי החיים, כימיה והנדסה כימית

פרק 1 - מבוא מתמטי

תוכן העניינים

1. מעברי יחידות 1
2. סינוס קוסינוס ומה שביניהם 3
3. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים 7
4. צפיפות 10
5. אלמנט מסה אינפיטיסימלי 11
6. נספח-נגזרת סתומה ואלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות 12

מעברי יחידות:

שאלות:

1) דוגמה 1

נתון: $A=2km\ ,\ B=10gr$.

מצא את $C=A\cdot B$ ביחידות של m.k.s.

2) דוגמה 2

נתון: $A=2m^2\ ,\ B=3gr\ ,\ C=5c.m\cdot s$

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D=2\cdot A$

ב. $E=\frac{5\cdot B\cdot C}{A}$

3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A=1m^2$

ב. $B=1m^3$

4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של $c.m^3$:

א. $5.2m^3$

ב. $320mm^3$

ג. $0.0054km^3$

5) ליטר, דוגמה

הבע את הגדלים הבאים ב- Liter :

א. $5m^3$

ב. $5mm^3$

תשובות סופיות:

1) $20\text{m}\cdot\text{kg}$

2) א. 4m^2 ב. $37.5\cdot10^{-5}\frac{\text{sec}\cdot\text{kg}}{\text{m}}$

3) א. 10^4cm^2 ב. 10^6cm^3

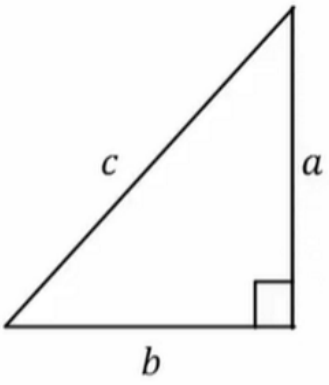
4) א. $5.2\cdot10^6\text{cm}^3$ ב. 0.32cm^3 ג. $5.4\cdot10^{12}\text{cm}^3$

5) א. $5\cdot10^3\text{Liter}$ ב. $5\cdot10^{-6}\text{Liter}$

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ליד ניצב}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

זהויות:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha==1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ערכים ששווה לזכור:

הזווית \הפונקציה	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר

פתרונות עבור:

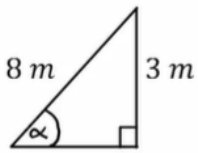
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=\pi-\alpha+2\pi k$	$\sin x=\sin\alpha$
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=-\alpha+2\pi k$	$\cos x=\cos\alpha$
$x=\alpha+\pi k$	$\tan x=\tan\alpha$

שאלות:

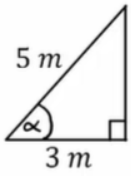
1) דוגמה 1-חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

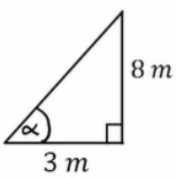
א.



ב.



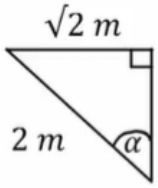
ג.



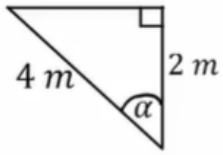
2) דוגמה 2-משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

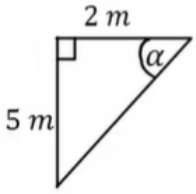
א.



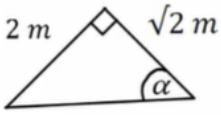
ב.



ג.

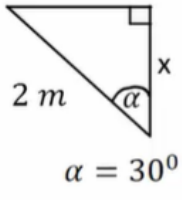


ד.

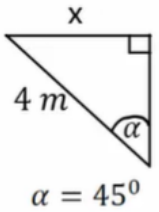


3) דוגמה-2-מציאת ניצבים

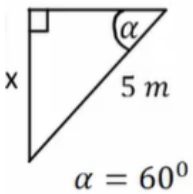
א.



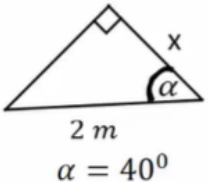
ב.



ג.



ד.



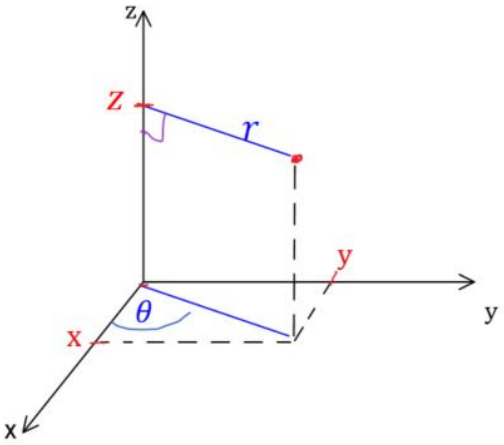
תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 22°$ ב. $\alpha = 53°$ ג. $\alpha = 69°$

2) א. $\alpha = 45°$ ב. $\alpha = 60°$ ג. $\alpha = 68.2°$ ד. $\alpha = 55°$

3) א. $\sqrt{3m}$ ב. $2\sqrt{2m}$ ג. $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$ ד. $1.53m$

קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים:



רקע:

קואורדינטות גליליות: (r,θ,z)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

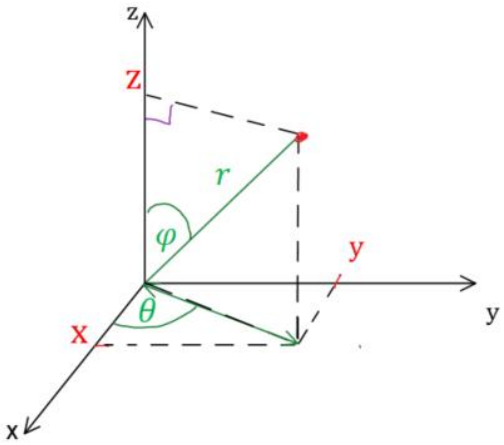
$$dl = r\,d\theta/d\,r/d\,z$$

דיסקה — מעטפת גלילית

$$dS = rd\theta\,d\,r/r\,d\theta\,d\,z/d\,r\,dz$$

גליל מלא

$$dV = rd\theta\,dr\,dz$$



קואורדינטות כדוריות: (r,θ,φ)

$$z = r\cos\varphi$$

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dl = dr/r\,\sin\varphi d\theta/r\,d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2\sin\varphi d\theta\,d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2\sin\varphi dr d\theta\,d\varphi$$

שאלות:

1) שטח מעגל

חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

2) חישוב נפח גליל

חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

1) $S = \pi R^2$

2) $V = \pi R^2 h$

צפיפות:

שאלות:

1) דיסקה עם חור

א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M?

ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r .
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{M}{\pi R^2}$ ב. $M\left(\frac{r}{R}\right)^2$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$

כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: L , λ_0 הם קבועים.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\lambda_0 L}{2}$

חשבון דיפרנציאלי:

שאלות:

1) נגזרת סתומה**

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x,y)=y^{\sin x}+6y+e^{x^2+y^2}=0$.

מצא את: $\frac{dy}{dx}$.

2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות**

נתונות קואורדינטות חדשות: $\theta'=\frac{1}{2}\theta$, $r'=\frac{1}{r^{2'}}$.

כאשר r ו-θ הם הקואורדינטות הפולריות.

מצא את גודלו של אלמנט אורך dl כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\ln y)(\cos x)\left(y^{\sin x}\right)+2xe^{x^2+y^2}}{\sin x\cdot y^{(\sin x-1)}+6+2ye^{\left(x^2+y^2\right)}}$$

2) $$dl^2=\frac{1}{4}r'^{-3}\,dr'^2+\frac{1}{r'}4d\theta'^2$$