

# חשמל גלים ואופטיקה

פרק 1 - מבוא מתמטי

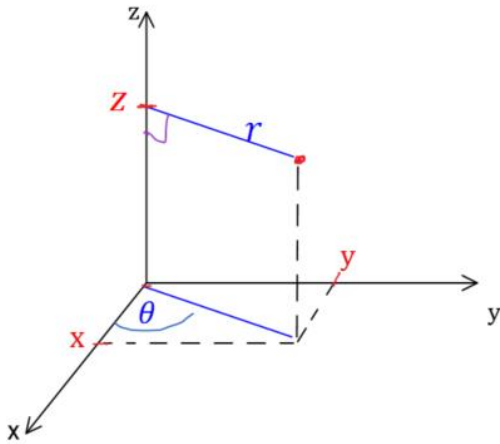
תוכן העניינים

1. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים.....1
2. צפיפות מטען.....4
3. וקטורים.....5
4. אופרטור הנאבלה.....7

## קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים:

רקע:

קואורדינטות גליליות:  $(r, \theta, z)$



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

$$dl = r d\theta / dr / dz$$

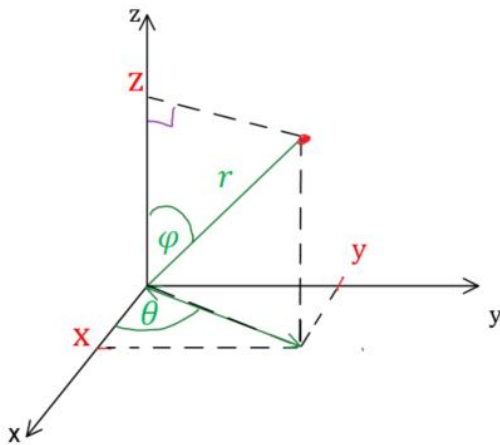
דיסקה

מעטפת  
גלילית

$$dS = r d\theta dr / r d\theta dz / dr dz$$

גליל מלא

$$dV = r d\theta dr dz$$



קואורדינטות כדוריות:  $(r, \theta, \varphi)$

$$z = r \cos \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dl = dr / r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

## שאלות:

## (1) שטח מעגל

חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס  $R$  (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

## (2) חישוב נפח גליל

חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

## תשובות סופיות:

$$S = \pi R^2 \quad (1)$$

$$V = \pi R^2 h \quad (2)$$

## צפיפות מטען:

### רקע:

**צפיפות נפחית** – כמות המטען ביחידת נפח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\rho = \frac{Q_T}{V}$ .

**צפיפות משטחית** – כמות המטען ביחידת שטח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

**צפיפות אורכית** – כמות המטען ביחידת אורך.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\lambda = \frac{Q}{L}$ .

**אלמנט מטען אינפיניטסימלי:**

$$dq = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$$

### שאלות:

#### (1) תרגיל - דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

#### (2) תרגיל – מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען:  $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ .

### תשובות:

$$Q \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (1)$$

$$\rho_0 \pi R^3 \quad (2)$$

## וקטורים:

**רקע:**

**וקטור יחידה:**

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

**מכפלה סקלרית:**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

**מציאת זווית בין וקטורים:**

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

**מכפלה וקטורית:**

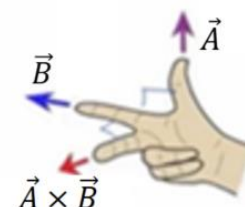
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha - \text{גודל המכפלה}$$

כיוון לפי כלל יד ימין -



יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג -



מסובבים את האצבעות מ- $\vec{A}$  ל- $\vec{B}$  והתוצאה בכיוון האגודל.

**בחירת מערכת צירים:**

במערכת צירים צריך להתקיים:  $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ .

**זהויות:**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = \vec{B}(\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D})$$

## אופרטור נאבלה:

רקע:

$$\vec{\nabla} = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

| בדוריות                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | גלילות                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | קרטזיות                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$                                                                                                                                                                                                                                                             | $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$                                                                                                                                                                                             | $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$                                                                                                                                                               | $\text{grad}$<br>$\vec{\nabla} f$                  |
| $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \sin \varphi)$                                                                                                                                                                                                                                | $\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$                                                                                                                                                                                                | $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$                                                                                                                                                                                 | $\text{div}$<br>$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$       |
| $\frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta}$<br>$+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$ | $\left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}$<br>$+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$ | $\left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y}$<br>$+ \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$ | $\text{Rot/curl}$<br>$\vec{\nabla} \times \vec{F}$ |

זהויות:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f + g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla}(\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ \vec{\nabla}(f \cdot g) &= (\vec{\nabla}f) \cdot g + (\vec{\nabla}g) \cdot f \\ \vec{\nabla}(f \cdot \vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}f) \end{aligned}$$