

## חשבון אינפיניטימלי 2

פרק 34 - מבוא מתמטי

תוכן העניינים

1. אינטגרל כפול ומשולש..... 1
2. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים..... 3
3. צפיפות מטען..... 6
4. וקטורים..... 7
5. אופרטור הנאבלה..... 9

## אינטגרל כפול ומשולש:

### שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

- |  |               |
|--|---------------|
| $\int_0^3 \int_0^2 3 \cdot x^3 y^2 dx dy$                    | 1 דוגמה (1)   |
| $\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y) dx dy$                         | 2 דוגמה (2)   |
| $\int_0^2 \int_1^3 (x^2 + y) dy dx$                          | 3 דוגמה (3)   |
| $\int_0^1 \int_0^2 x \cdot z^2 dx dz$                        | 4 דוגמה (4)   |
| $\int_1^5 \int_0^4 2 \cdot y^3 dy dz$                        | 5 דוגמה (5)   |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta$                      | 6 דוגמה (6)   |
| $\int_a^b \int_0^c 4 \cdot x^2 y dx dy$                      | 7 דוגמה (7)   |
| $\int_a^b \int_0^c (4z + r^2) dr dz$                         | 8 דוגמה (8)   |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4a \cdot r^2 dr d\theta$             | 9 דוגמה (9)   |
| $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4yr^2 dr d\theta$                    | 10 דוגמה (10) |
| $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ | 11 דוגמה (11) |

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (zx^2 + 3y) dy dx dz$$

12 דוגמה – אינטגרל משולש

**תשובות סופיות:**

108 (1)

18 (2)

13.33 (3)

$\frac{2}{3}$  (4)

512 (5)

56.55 (6)

$\frac{4c^3}{3} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$  (7)

$2cb^2 + \frac{c^3}{3}b - 2ca^2 - \frac{a^3}{3}$  (8)

$\frac{4aR^3}{3} 2\pi$  (9)

$\frac{8\pi yR^3}{3}$  (10)

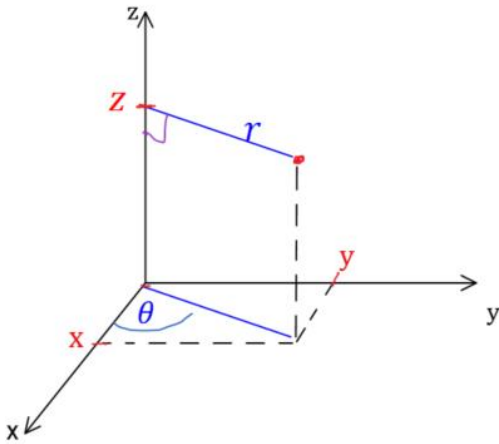
$4\pi r^2$  (11)

39 (12)

## קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים:

רקע:

קואורדינטות גליליות:  $(r, \theta, z)$



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

$$dl = r d\theta / dr / dz$$

דיסקה <sup>מעטפת</sup>  
גלילית

$$dS = r d\theta dr / r d\theta dz / dr dz$$

גליל מלא

$$dV = r d\theta dr dz$$



קואורדינטות כדוריות:  $(r, \theta, \varphi)$

$$z = r \cos \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

**שאלות:**

- (1) **שטח מעגל**  
חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס  $R$  (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.
- (2) **חישוב נפח גליל**  
חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

**תשובות סופיות:**

$$S = \pi R^2 \quad (1)$$

$$V = \pi R^2 h \quad (2)$$

## צפיפות מטען:

רקע:

**צפיפות נפחית** – כמות המטען ביחידת נפח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\rho = \frac{Q}{V}$ .

**צפיפות משטחית** – כמות המטען ביחידת שטח.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

**צפיפות אורכית** – כמות המטען ביחידת אורך.

אם הצפיפות אחידה אז היא שווה ל-  $\lambda = \frac{Q}{L}$ .

אלמנט מטען אינפיטיסימלי:

$$dq = \lambda dl / \sigma ds / \rho dv$$

שאלות:

(1) תרגיל - דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

(2) תרגיל – מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען:  $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ .

תשובות:

$$Q \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (1)$$

$$\rho_0 \pi R^3 \quad (2)$$

## וקטורים:

**רקע:**

**וקטור יחידה:**

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

**מכפלה סקלרית:**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

**מציאת זווית בין וקטורים:**

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

**מכפלה וקטורית:**

**דרך 1 – דטרמיננטה:**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

**דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:**

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$$

**כיוון לפי כלל יד ימין -**



יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג -



מסובבים את האצבעות מ- $\vec{A}$  ל- $\vec{B}$  והתוצאה בכיוון האגודל.

**בחירת מערכת צירים:**

במערכת צירים צריך להתקיים:  $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ .

**זהויות:**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = \vec{B}(\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D})$$

## אופרטור נאבלה:

רקע:

$$\vec{\nabla} = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

כדוריות	גליליות	קרטזיות	
$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	grad $\vec{\nabla} f$
$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \sin \varphi)$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$
$\frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$	$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta}$ $+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$	$\left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y}$ $+ \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$	Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

זהויות:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f + g) &= \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \\ \vec{\nabla}(\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ \vec{\nabla}(f \cdot g) &= (\vec{\nabla}f) \cdot g + (\vec{\nabla}g) \cdot f \\ \vec{\nabla}(f \cdot \vec{A}) &= f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}f) \end{aligned}$$