פיזיקה 1 מכניקה

פרק 1 - מבוא מתמטי -

תוכן העניינים

1. נושא ישן ..... (ללא ספר)
2. מעברי יחידות 1
3. סינוס קוסינוס ומה שביניהם 3
4. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים 7
5. אינטגרל כפול ומשולש 13
6. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים 15
7. צפיפות 18
8. אלמנט מסה אינפיטיסימלי 19
9. נספח-נגזרת סתומה ואלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות 20

מעברי יחידות:

שאלות:

1) דוגמה 1

נתון: $A = 2km\ ,\ B = 10gr$.

מצא את $C = A \cdot B$ ביחידות של m.k.s.

2) דוגמה 2

נתון: $A = 2m^2\ ,\ B = 3gr\ ,\ C = 5c.m \cdot s$

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D = 2 \cdot A$

ב. $E = \frac{5 \cdot B \cdot C}{A}$

3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A = 1m^2$

ב. $B = 1m^3$

4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של $c.m^3$:

א. $5.2m^3$

ב. $320mm^3$

ג. $0.0054km^3$

5) ליטר, דוגמה

הבע את הגדלים הבאים ב- Liter:

א. $5m^3$

ב. $5mm^3$

תשובות סופיות:

1) $20m \cdot kg$

2) א. $4m^2$ ב. $37.5 \cdot 10^{-5} \frac{sec \cdot kg}{m}$

3) א. $10^4 cm^2$ ב. $10^6 cm^3$

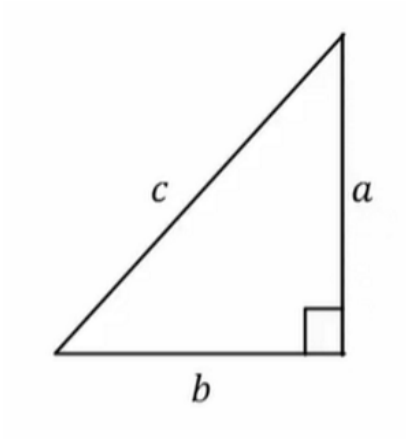
4) א. $5.2 \cdot 10^6 cm^3$ ב. $0.32cm^3$ ג. $5.4 \cdot 10^{12} cm^3$

5) א. $5 \cdot 10^3 Liter$ ב. $5 \cdot 10^{-6} Liter$

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ליד ניצב}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

זהויות:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha==1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ערכים ששווה לזכור:

הזווית\הפונקציה	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר

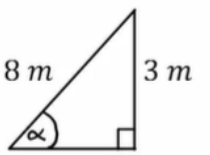
פתרונות עבור:

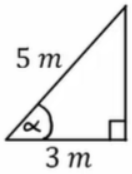
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=\pi-\alpha+2\pi k$	$\sin x=\sin\alpha$
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=-\alpha+2\pi k$	$\cos x=\cos\alpha$
$x=\alpha+\pi k$	$\tan x=\tan\alpha$

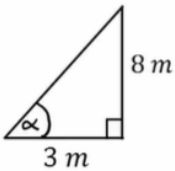
שאלות:

1) דוגמה 1-חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

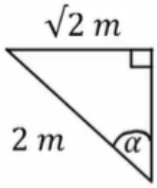
א.


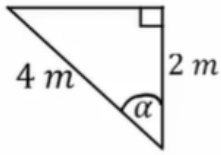
ב.


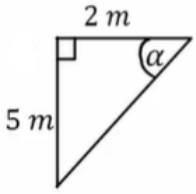
ג.


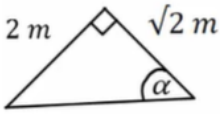
2) דוגמה 2-משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

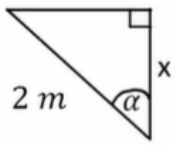
א.


ב.


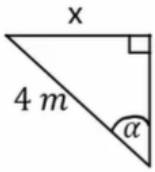
ג.


ד.


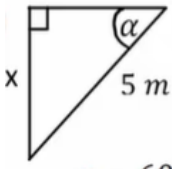
3) דוגמה-2-מציאת ניצבים

א.


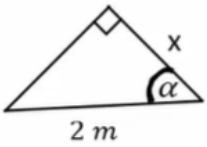
$\alpha = 30^0$

ב.


$\alpha = 45^0$

ג.


$\alpha = 60^0$

ד.


$\alpha = 40^0$

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 22°$ ב. $\alpha = 53°$ ג. $\alpha = 69°$

2) א. $\alpha = 45°$ ב. $\alpha = 60°$ ג. $\alpha = 68.2°$ ד. $\alpha = 55°$

3) א. $\sqrt{3m}$ ב. $2\sqrt{2m}$ ג. $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$ ד. $1.53m$

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

רקע

נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם y היא פונקציה של x אז הסימון של הנגזרת של y לפי x הוא $\frac{dy}{dx}$ או y'.

נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$\left(Ay(x)\right)' = Ay'(x)$$

נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = \mathrm{f}'(x)\mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)$$

כלל שרשרת:

אם y היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

אינטגרל:

פעולה הפוכה לנגזרת.

אינטגרל של פולינום

$$\int Ax^n \, \mathrm{d}x = A\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

מה עושה האינטגרל?

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

שאלות:

1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=5x^4$, $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=ax^5$, $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^{18}$, $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $f(x)=8x^2+2$, $\frac{df}{dx}=?$

ה. $y=6t^2$, $\frac{dy}{dt}=?$

ו. $x=5t^3$, $\frac{dx}{dt}=?$

ז. $x=5t^4+t^3+4$, $\frac{dx}{dt}=?$

ח. $f(t)=\mathrm{A}t^6+\mathrm{B}t+\mathrm{C}$, $\frac{df}{dt}=?$

2) דוגמא 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=\left(5x^4+2\right)\left(5x+2x^{18}\right)$, $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=\mathrm{A}x^5\left(\mathrm{B}+\mathrm{C}x^3\right)$, $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^2\left(4x+5x^5\right)$, $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $y=\left(5t^2+1\right)\left(2t+27+5t^3\right)$, $\frac{dy}{dt}=?$

ה. $x=\left(2t^3+7\right)\left(4t+3+6t^2\right)$, $\frac{dy}{dt}=?$

3) דוגמא 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$, $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$, $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5t+2(5t^4+4)^{14}$, $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $f(t)=8(5t^4+t^3+4)^2+2$, $\frac{df}{dt}=?$

4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$, $x=2t$, $\frac{dy}{dt}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$, $x=5t^4+4$, $\frac{dy}{dt}=?$

ג. $y=5x+2(5x^4+4)^{14}$, $x=3t^2+t$, $\frac{dy}{dt}=?$

ד. $y=x^2$, $x=t^2$, $\frac{dy}{dt}=?$

5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $y=\sin(ax)$ כאשר a קבוע.

ב. $y=e^{-x^2}$

6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^7 dx$

ב. $\int x dx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3dx$

ה. $\int 7x^4 dx$

ו. $\int (5x^2+3)dx$

ז. $\int\left(8x^7+5x\right)dx$

ח. $\int Ax^7dx$

ט. $\int\left(Ax^7+Bx\right)dx$

7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^2 x^5dx$

ב. $\int_1^5 4dx$

ג. $\int_{-1}^3 7x^4dx$

ד. $\int_0^4\left(2x^2+4\right)dx$

ה. $\int_{-1}^2\left(Ax^7+Bx\right)dx$

8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\pi \sin xdx$

ב. $\int_0^\pi \cos\left(2x\right)dx$

ג. $\int e^{3x}dx$

ד. $\int_0^5 2e^{-3x}dx$

ה. $\int_3^5 \frac{1}{x}dx$

ו. $\int \frac{1}{x^2}dx$

ז. $\int e^{ax}dx$

תשובות סופיות:

1) א. $20x^3$ ב. $5a\cdot x^4$ ג. $5+36x^{17}$ ד. $16x$ ה. $12\cdot t$
ו. $15t^2$ ז. $20t^3+3t^2$ ח. $6At^5+B$

2) א. $20x^3\cdot\left(5x+2x^{18}\right)+\left(5x^4+2\right)\left(5+36x^{17}\right)$ ב. $5Ax^4\left(B+Cx^3\right)+3ACx^7$
ג. $5+4x\cdot\left(4x+5x^5\right)+2x^2\left(4+25x^4\right)$
ד. $(10t)\left(2t+27+5t^3\right)+\left(5t^2+1\right)\left(2+0+15t^2\right)$
ה. $\left(6t^2+0\right)\left(4t+3+6t^2\right)+\left(2t^3+7\right)\left(4+0+12t\right)$

3) א. $4(x+2)^3\cdot 1$ ב. $25\left(8x^2+x\right)^4(16x+1)$ ג. $5+560t^3(5t^4+4)^{13}$
ד. $16\left(5t^4+t^3+4\right)\left(20t^3+3t^2\right)$

4) א. $8(2t+2)^3$ ב. $500t^3\left(8\left(5t^4+4\right)^2+5t^4+4\right)\cdot\left(16\left(5t^4+4\right)+1\right)$
ג. $\left(5+2\cdot 14\left(5x^4+4\right)^{13}\cdot\left(5\cdot 4x^3+0\right)\right)\cdot(3+2t+1)$ ד. $4t^3$

5) א. $\cos(ax)\cdot a$ ב. $e^{-x^2}\cdot(-2x)$

6) א. $\frac{x^8}{8}+C$ ב. $\frac{x^2}{2}+C$ ג. $x+C$ ד. $3x$ ה. $\frac{7x^5}{5}+C$
ו. ז. $x^8+\frac{5}{2}x^2+C$ ח. $A\cdot\frac{x^8}{8}+C$ ט. $A\frac{x^8}{8}+B\frac{x^2}{2}+C$

7) א. 10.67 ב. 16 ג. 341.6 ד. 58.67 ה. $31.875A+1.5B$

8) א. 2 ב. 0 ג. $\frac{e^{3x}}{3}+C$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
ו. $-\frac{1}{x}+C$ ז. $\frac{e^{ax}}{a}$

אינטגרל כפול ומשולש:

שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

1) דוגמה 1 $\int_0^3\int_0^2 3\cdot x^3y^2dxdy$

2) דוגמה 2 $\int_1^2\int_0^3\left(x^2+2y\right)dxdy$

3) דוגמה 3 $\int_0^2\int_1^3\left(x^2+y\right)dydx$

4) דוגמה 4 $\int_0^1\int_0^2 x\cdot z^2dxdz$

5) דוגמה 5 $\int_1^5\int_0^4 2\cdot y^3dydz$

6) דוגמה 6 $\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2drd\theta$

7) דוגמה 7 $\int_a^b\int_0^c 4\cdot x^2ydxdy$

8) דוגמה 8 $\int_a^b\int_0^c\left(4z+r^2\right)drdz$

9) דוגמה 9 $\int_0^{2\pi}\int_0^R 4\mathrm{a}\cdot r^2drd\theta$

10) דוגמה 10 $\int_0^{2\pi}\int_0^R 4yr^2drd\theta$

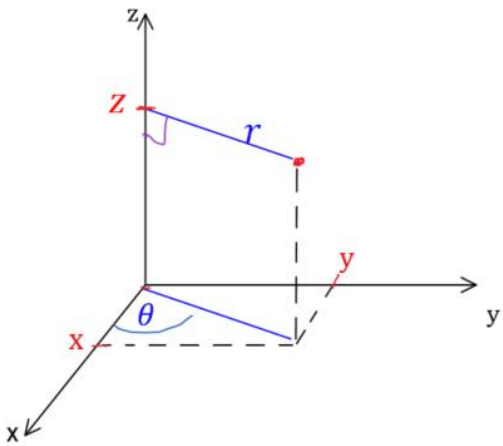
11) דוגמה 11 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi d\theta d\varphi$

12) דוגמה – אינטגרל משולש $\int_1^2\int_0^2\int_0^3\left(zx^2+3y\right)dydxdz$

תשובות סופיות:

1) 108
2) 18
3) 13.33
4) $\frac{2}{3}$
5) 512
6) 56.55
7) $\frac{4c^3}{3}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$
8) $2cb^2+\frac{c^3}{3}b-2ca^2-\frac{a^3}{3}$
9) $\frac{4aR^3}{3}2\pi$
10) $\frac{8\pi yR^3}{3}$
11) $4\pi r^2$
12) 39

קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים:



רקע:

קואורדינטות גליליות: (r,θ,z)

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

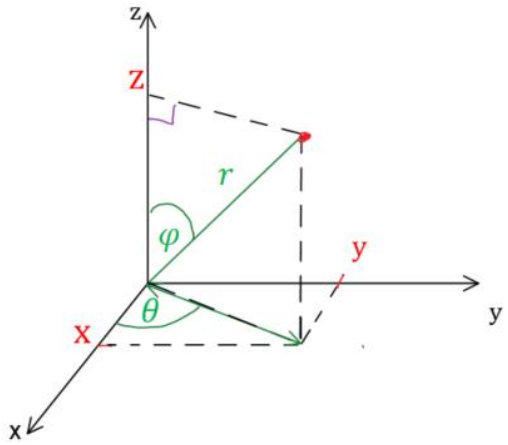
$$dl = r\,d\theta/d\,r/d\,z$$

דיסקה מעטפת גלילית

$$dS = rd\theta\,d\,r/r\,d\theta\,d\,z/d\,r\,dz$$

גליל מלא

$$dV = rd\theta\,dr\,dz$$



קואורדינטות כדוריות: (r,θ,φ)

$$z = r\cos\varphi$$

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dl = d\,r/r\sin\varphi d\theta/r\,\mathrm{d}\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2\sin\varphi d\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2\sin\varphi dr d\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

שאלות:

1) שטח מעגל

חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

2) חישוב נפח גליל

חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

1) $S = \pi R^2$

2) $V = \pi R^2 h$

צפיפות:

שאלות:

1) דיסקה עם חור

א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M?

ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r.
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{M}{\pi R^2}$ ב. $M\left(\frac{r}{R}\right)^2$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$

כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים : L , λ_0 הם קבועים.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\lambda_0 L}{2}$

חשבון דיפרנציאלי:

שאלות:

1) נגזרת סתומה**

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x,y)=y^{\sin x}+6y+e^{x^2+y^2}=0$.

מצא את: $\frac{dy}{dx}$.

2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות**

נתונות קואורדינטות חדשות: $\theta'=\frac{1}{2}\theta$, $r'=\frac{1}{r^{2'}}$.

כאשר r ו-θ הם הקואורדינטות הפולריות.

מצא את גודלו של אלמנט אורך dl כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\ln y)(\cos x)\left(y^{\sin x}\right)+2xe^{x^2+y^2}}{\sin x\cdot y^{(\sin x-1)}+6+2ye^{\left(x^2+y^2\right)}}$$

2) $$dl^2=\frac{1}{4}r'^{-3}\,dr'^2+\frac{1}{r'}4d\theta'^2$$