

# פיזיקה 1 מכניקה

פרק 1 - מבוא מתמטי -

תוכן העניינים

|    |                                                    |
|----|----------------------------------------------------|
| 1  | 1. סינוס קוסינוס ומה שביניהם                       |
| 5  | 2. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים                       |
| 11 | 3. אינטגרל כפול ומשולש                             |
| 13 | 4. מעברי יחידות                                    |
| 15 | 5. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים                |
| 18 | 6. צפיפות                                          |
| 19 | 7. אלמנט מסה אינפיטיסימלי                          |
| 20 | 8. נספח-נגזרת סתומה ואלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות |

## סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:

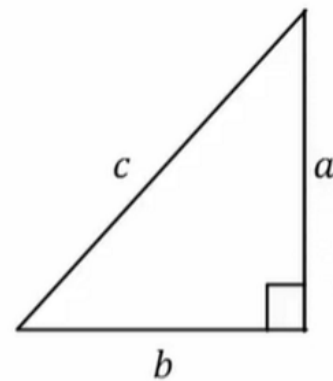
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ליד ניצב}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$



משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

## זהויות:

|                                                                                                                                                                                 |                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$<br>$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$<br>$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$        | $90^\circ - \alpha$  |
| $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$<br>$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$<br>$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$<br>$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$     | $90^\circ + \alpha$  |
| $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$<br>$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ | $180^\circ - \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$<br>$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$                                             | $-\alpha$            |
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$<br>$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$                                        | $2\alpha$            |
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$<br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$                    | $\alpha \pm \beta$   |

## סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

## ערכים ששווה לזכור:

| הזווית והפונקציה | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$                                | $60^\circ$           | $90^\circ$ |
|------------------|-----------|----------------------|-------------------------------------------|----------------------|------------|
| $\sin \alpha$    | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          |
| $\cos \alpha$    | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          |
| $\tan \alpha$    | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                                         | $\sqrt{3}$           | לא מוגדר   |

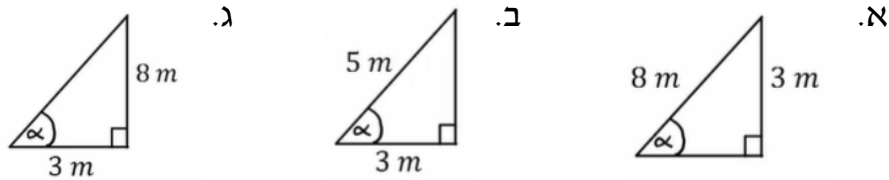
## פתרונות עבור:

|                                                          |                        |
|----------------------------------------------------------|------------------------|
| $x_1 = \alpha + 2\pi k$<br>$x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ | $\sin x = \sin \alpha$ |
| $x_1 = \alpha + 2\pi k$<br>$x_2 = -\alpha + 2\pi k$      | $\cos x = \cos \alpha$ |
| $x = \alpha + \pi k$                                     | $\tan x = \tan \alpha$ |

## שאלות:

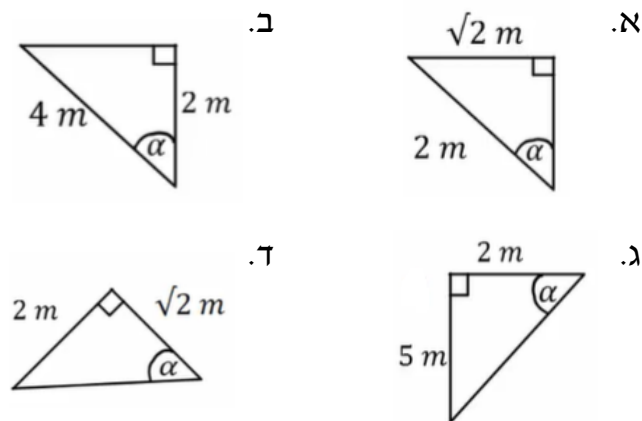
## (1) דוגמה 1- חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

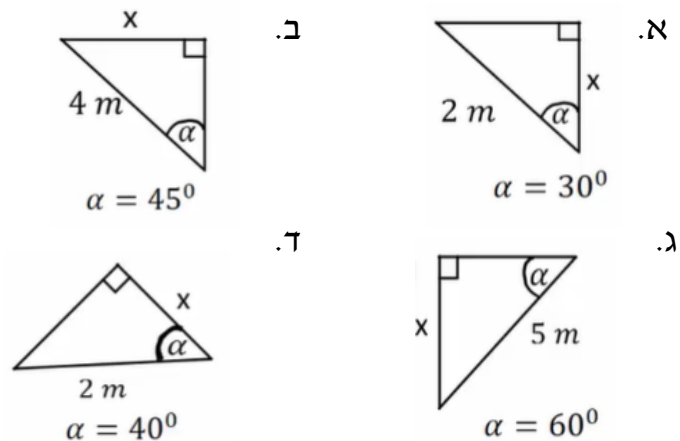


## (2) דוגמה 2- משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:



## (3) דוגמה 2- מציאת ניצבים



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\alpha = 22^\circ$  ב.  $\alpha = 53^\circ$  ג.  $\alpha = 69^\circ$   
 (2) א.  $\alpha = 45^\circ$  ב.  $\alpha = 60^\circ$  ג.  $\alpha = 68.2^\circ$  ד.  $\alpha = 55^\circ$   
 (3) א.  $\sqrt{3m}$  ב.  $2\sqrt{2m}$  ג.  $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$  ד.  $1.53m$

## נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

### רקע

#### נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם  $y$  היא פונקציה של  $x$  אז הסימון של הנגזרת של  $y$  לפי  $x$  הוא  $\frac{dy}{dx}$  או  $y'$ .

#### נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = nx^{n-1}$$

#### כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$(Ay(x))' = Ay'(x)$$

#### נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

#### כלל שרשרת:

אם  $y$  היא פונקציה של  $x$  ו- $x$  היא פונקציה של  $t$  אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

#### נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} ; \quad \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x ; \quad \frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x ; \quad \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

**אינטגרל:**

פעולה הפוכה לנגזרת.

**אינטגרל של פולינום**

$$\int Ax^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

**מה עושה האינטגרל?**

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

## שאלות:

## (1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = 5x^4$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = ax^5$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5x + 2x^{18}$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $f(x) = 8x^2 + 2$ ,  $\frac{df}{dx} = ?$

ה.  $y = 6t^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ו.  $x = 5t^3$ ,  $\frac{dx}{dt} = ?$

ז.  $x = 5t^4 + t^3 + 4$ ,  $\frac{dx}{dt} = ?$

ח.  $f(t) = At^6 + Bt + C$ ,  $\frac{df}{dt} = ?$

## (2) דוגמה 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18})$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = Ax^5(B + Cx^3)$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5)$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3)$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ה.  $x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2)$ ,  $\frac{dx}{dt} = ?$

**(3) דוגמה 3-נגזרת פנימית**

חשב את הנגזרות הבאות :

א.  $y = (x+2)^4$  ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = 5(8x^2 + x)^5$  ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}$  ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2$  ,  $\frac{df}{dt} = ?$

**(4) דוגמה 4-כלל שרשרת**

חשב את הנגזרות הבאות :

א.  $y = (x+2)^4$  ,  $x = 2t$  ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ב.  $y = 5(8x^2 + x)^5$  ,  $x = 5t^4 + 4$  ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ג.  $y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}$  ,  $x = 3t^2 + t$  ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ד.  $y = x^2$  ,  $x = t^2$  ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

**(5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות**

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות :

א.  $y = \sin(ax)$  כאשר  $a$  קבוע.

ב.  $y = e^{-x^2}$

**(6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים**

חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int x^7 dx$

ב.  $\int x dx$

ג.  $\int dx$

ד.  $\int 3 dx$

ה.  $\int 7x^4 dx$

ו.  $\int (5x^2 + 3) dx$

$$\int (8x^7 + 5x) dx \quad \text{ז.}$$

$$\int Ax^7 dx \quad \text{ח.}$$

$$\int (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ט.}$$

**(7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים**  
 חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^2 x^5 dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^5 4dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_{-1}^3 7x^4 dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 (2x^2 + 4) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ה.}$$

**(8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות**  
 חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int e^{3x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^5 2e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int e^{ax} dx \quad \text{ז.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $20x^3$  ב.  $5a \cdot x^4$  ג.  $5 + 36x^{17}$  ד.  $16x$  ה.  $12 \cdot t$   
ו.  $15t^2$  ז.  $20t^3 + 3t^2$  ח.  $6At^5 + B$
- (2) א.  $20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17})$  ב.  $5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7$  ג.  $5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4)$   
ד.  $(10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2)$   
ה.  $(6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t)$
- (3) א.  $4(x + 2)^3 \cdot 1$  ב.  $25(8x^2 + x)^4(16x + 1)$  ג.  $5 + 560t^3(5t^4 + 4)^{13}$  ד.  $16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2)$
- (4) א.  $8(2t + 2)^3$  ב.  $500t^3(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1)$  ג.  $(5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0)) \cdot (3 + 2t + 1)$  ד.  $4t^3$
- (5) א.  $\cos(ax) \cdot a$  ב.  $e^{-x^2} \cdot (-2x)$
- (6) א.  $\frac{x^8}{8} + C$  ב.  $\frac{x^2}{2} + C$  ג.  $x + C$  ד.  $3x$  ה.  $\frac{7x^5}{5} + C$  ו.  $x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C$  ז.  $A \cdot \frac{x^8}{8} + C$  ח.  $A \cdot \frac{x^8}{8} + B \cdot \frac{x^2}{2} + C$  ט.  $31.875A + 1.5B$
- (7) א.  $10.67$  ב.  $16$  ג.  $341.6$  ד.  $58.67$  ה.  $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
- (8) א.  $2$  ב.  $0$  ג.  $\frac{e^{3x}}{3} + C$  ד.  $\frac{2}{3}$  ו.  $\frac{e^{ax}}{a}$  ז.  $-\frac{1}{x} + C$

## אינטגרל כפול ומשולש:

### שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

- (1) דוגמה 1  $\int_0^3 \int_0^2 3 \cdot x^3 y^2 dx dy$
- (2) דוגמה 2  $\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y) dx dy$
- (3) דוגמה 3  $\int_0^2 \int_1^3 (x^2 + y) dy dx$
- (4) דוגמה 4  $\int_0^1 \int_0^2 x \cdot z^2 dx dz$
- (5) דוגמה 5  $\int_1^5 \int_0^4 2 \cdot y^3 dy dz$
- (6) דוגמה 6  $\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta$
- (7) דוגמה 7  $\int_a^b \int_0^c 4 \cdot x^2 y dx dy$
- (8) דוגמה 8  $\int_a^b \int_0^c (4z + r^2) dr dz$
- (9) דוגמה 9  $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4a \cdot r^2 dr d\theta$
- (10) דוגמה 10  $\int_0^{2\pi} \int_0^R 4yr^2 dr d\theta$
- (11) דוגמה 11  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (zx^2 + 3y) dy dx dz$$

(12) דוגמה – אינטגרל משולש

### תשובות סופיות:

(1) 108

(2) 18

(3) 13.33

(4)  $\frac{2}{3}$

(5) 512

(6) 56.55

(7)  $\frac{4c^3}{3} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$

(8)  $2cb^2 + \frac{c^3}{3}b - 2ca^2 - \frac{a^3}{3}$

(9)  $\frac{4aR^3}{3} 2\pi$

(10)  $\frac{8\pi yR^3}{3}$

(11)  $4\pi r^2$

(12) 39

## מעברי יחידות:

### שאלות:

#### (1) דוגמה 1

נתון:  $A = 2\text{km}$ ,  $B = 10\text{gr}$ .

מצא את  $C = A \cdot B$  ביחידות של m.k.s.

#### (2) דוגמה 2

נתון:  $A = 2\text{m}^2$ ,  $B = 3\text{gr}$ ,  $C = 5\text{c.m} \cdot \text{s}$ .

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א.  $D = 2 \cdot A$

ב.  $E = \frac{5 \cdot B \cdot C}{A}$

#### (3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א.  $A = 1\text{m}^2$

ב.  $B = 1\text{m}^3$

#### (4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של  $\text{c.m}^3$ :

א.  $5.2\text{m}^3$

ב.  $320\text{mm}^3$

ג.  $0.0054\text{km}^3$

#### (5) ליטר, דוגמה

הבע את הגדלים הבאים ב-Liter:

א.  $5\text{m}^3$

ב.  $5\text{mm}^3$

## תשובות סופיות:

(1)  $20\text{m} \cdot \text{kg}$

(2) א.  $4\text{m}^2$

(3) א.  $10^4\text{cm}^2$

(4) א.  $5.2 \cdot 10^6\text{cm}^3$

(5) א.  $5 \cdot 10^3\text{Liter}$

ב.  $37.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{sec} \cdot \text{kg}}{\text{m}}$

ב.  $10^6\text{cm}^3$

ב.  $0.32\text{cm}^3$  ג.  $5.4 \cdot 10^{12}\text{cm}^3$

ב.  $5 \cdot 10^{-6}\text{Liter}$

## קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים:

רקע:

קואורדינטות גליליות:  $(r, \theta, z)$ 

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

$$dl = r d\theta / dr / dz$$

דיסקה

מעטפת  
גלילית

$$dS = r d\theta dr / r d\theta dz / dr dz$$

גליל מלא

$$dV = r d\theta dr dz$$

קואורדינטות כדוריות:  $(r, \theta, \varphi)$ 

$$z = r \cos \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dl = dr/r \sin \varphi d\theta / r d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

## שאלות:

- (1) שטח מעגל  
 חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס  $R$  (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.
- (2) חישוב נפח גליל  
 חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

## תשובות סופיות:

$$S = \pi R^2 \quad (1)$$

$$V = \pi R^2 h \quad (2)$$

## צפיפות:

### שאלות:

#### (1) דיסקה עם חור

- א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס  $R$  ומסה  $M$ ?
- ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס  $r$ .  
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{M}{\pi R^2} \quad \text{ב. } M \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

## צפיפות אינפיטיסימלית:

### שאלות:

#### (1) מוט עם צפיפות לא אחידה

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך  $L$  וצפיפות מסה  $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$  כאשר  $x$  הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים:  $\lambda_0$ ,  $L$  הם קבועים.

### תשובות סופיות:

$$\frac{\lambda_0 L}{2} \quad (1)$$

## חשבון דיפרנציאלי:

### שאלות:

#### (1) נגזרת סתומה\*\*

נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x, y) = y^{\sin x} + 6y + e^{x^2+y^2} = 0$

מצא את:  $\frac{dy}{dx}$ .

#### (2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות\*\*

נתונות קואורדינטות חדשות:  $r' = \frac{1}{r^2}$ ,  $\theta' = \frac{1}{2}\theta$

כאשר  $r$  ו- $\theta$  הם הקואורדינטות הפולריות.  
מצא את גודלו של אלמנט אורך  $dl$  כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

### תשובות סופיות:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\ln y)(\cos x)(y^{\sin x}) + 2xe^{x^2+y^2}}{\sin x \cdot y^{(\sin x-1)} + 6 + 2ye^{(x^2+y^2)}} \quad (1)$$

$$dl^2 = \frac{1}{4}r'^{-3}dr'^2 + \frac{1}{r'}4d\theta'^2 \quad (2)$$