

פיזיקה 1 מכנייקה

פרק 1 - מבוא מתמטי -

תוכן העניינים

1. נושא ישן	(ללא ספר)
1	2. מעברי ייחידות
3	3. סינוס קוסינוס ומה שביןיהם
7	4. נגזרות וaintגרלים בסיסיים
13	5.aintגרל כפול ומשולש
15	6. קוואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים
16	7. צפיפות
17	8. אלמנט מסה אינפיטיסימלי
18	9. נספח-נגזרת סטומה ואלמנט אורך בהחלפת קוואורדינטות

מעברי יחידות:

שאלות:

1) דוגמה 1

נתון : $A = 2\text{km}$, $B = 10\text{gr}$
מצא את $C = A \cdot B \cdot m \cdot k \cdot s$ ביחידות של

2) דוגמה 2

נתון : $A = 2\text{m}^2$, $B = 3\text{gr}$, $C = 5\text{c.m.s}$
חשב את הגודלים הבאים ביחידות של s.m.k.s :

$$\text{א. } D = 2 \cdot A$$

$$\text{ב. } E = \frac{5 \cdot B \cdot C}{A}$$

3) מעבר יחידות בחזקות

מצא את הגודלים הבאים ביחידות של ס"מ :

$$\text{א. } A = 1\text{m}^2$$

$$\text{ב. } B = 1\text{m}^3$$

4) סנטימטר בשלישית

הבע את הערכיים הניל ביחידות של c.m^3 :

$$\text{א. } 5.2\text{m}^3$$

$$\text{ב. } 320\text{mm}^3$$

$$\text{ג. } 0.0054\text{km}^3$$

5) ליטר, דוגמה

הבע את הגודלים הבאים ב- Liter :

$$\text{א. } 5\text{m}^3$$

$$\text{ב. } 5\text{mm}^3$$

תשובות סופיות:

$$20\text{m} \cdot \text{kg} \quad \text{(1)}$$

$$37.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{sec} \cdot \text{kg}}{\text{m}} \quad \text{ב.} \quad 4\text{m}^2 \cdot \text{N} \quad \text{(2)}$$

$$10^6 \text{cm}^3 \quad \text{ב.} \quad 10^4 \text{cm}^2 \cdot \text{N} \quad \text{(3)}$$

$$5.4 \cdot 10^{12} \text{cm}^3 \cdot \text{ג.} \quad 0.32\text{cm}^3 \cdot \text{ב.} \quad 5.2 \cdot 10^6 \text{cm}^3 \cdot \text{א.} \quad \text{(4)}$$

$$5 \cdot 10^{-6} \text{Liter} \quad \text{ב.} \quad 5 \cdot 10^3 \text{Liter} \cdot \text{א.} \quad \text{(5)}$$

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:

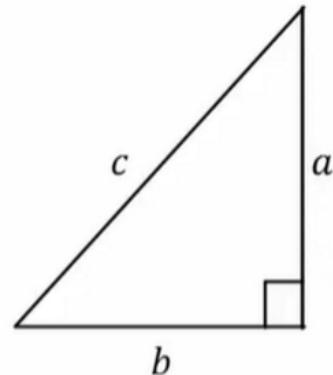
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{לייד ניצב}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$



משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

זהויות:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$90^\circ - \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$	
$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$	$90^\circ + \alpha$
$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$	
$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	
$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$-\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	2α
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$	$\alpha \pm \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	

סיכום והפרש של פונקציות:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

ערכיים שווים לזו:

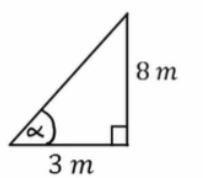
הزاوية והפונקציה	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר

פתרונות עבור:

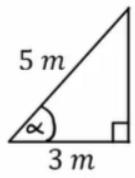
$x_1 = \alpha + 2\pi k$ $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$	$\sin x = \sin \alpha$
$x_1 = \alpha + 2\pi k$ $x_2 = -\alpha + 2\pi k$	$\cos x = \cos \alpha$
$x = \alpha + \pi k$	$\tan x = \tan \alpha$

שאלות:**1) דוגמה 1- חישוב אלפא**

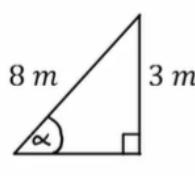
חשב את הזווית אלפא במקיריים הבאים:



ג.



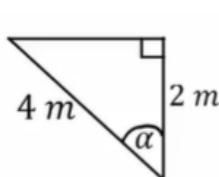
ב.



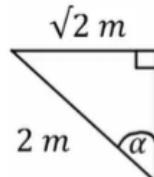
א.

2) דוגמה 2- משולשים משורטטים אחרה

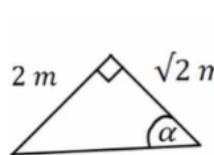
חשב את הזווית אלפא במקיריים הבאים:



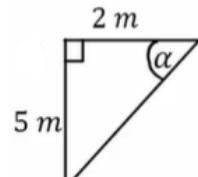
ב.



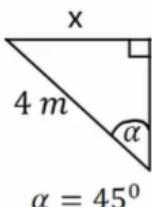
א.



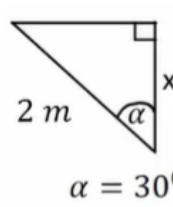
ג.



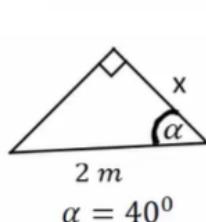
ד.

3) דוגמה-2- מציאת ניצבים

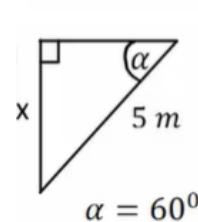
ב.



א.



ג.



ד.

תשובות סופיות:

(1) א. $\alpha = 69^\circ$ ב. $\alpha = 53^\circ$ ג. $\alpha = 22^\circ$

(2) א. $\alpha = 55^\circ$ ב. $\alpha = 68.2^\circ$ ג. $\alpha = 60^\circ$ ד. $\alpha = 45^\circ$

(3) א. $1.53m$ ב. $\frac{5\sqrt{3}m}{2}$ ג. $2\sqrt{2m}$ ד. $\sqrt{3m}$

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

פרק

נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם y היא פונקציה של x אז הסימן של הנגזרת של y לפי x הוא $\frac{dy}{dx}$ או y' .

נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = nx^{n-1}$$

כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$(Ay(x))' = Ay'(x)$$

נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

כלל שרשרת:

אם u היא פונקציה של x ו- x הוא פונקציה של t אז :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} ; \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x ; \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

אינטגרל:

פעולה הפוכה לנגזרת.

אינטגרל של פולינום

$$\int Ax^n \, dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע להתוצאה האינטגרל.
אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

מה עושה האינטגרל?

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.
האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

שאלות:**1) דוגמה 1**

חשב את הנגזרות הבאות :

$$y = 5x^4, \frac{dy}{dx} = ? . \text{א}$$

$$y = ax^5, \frac{dy}{dx} = ? . \text{ב}$$

$$y = 5x + 2x^{18}, \frac{dy}{dx} = ? . \text{ג}$$

$$f(x) = 8x^2 + 2, \frac{df}{dx} = ? . \text{ד}$$

$$y = 6t^2, \frac{dy}{dt} = ? . \text{ה}$$

$$x = 5t^3, \frac{dx}{dt} = ? . \text{ו}$$

$$x = 5t^4 + t^3 + 4, \frac{dx}{dt} = ? . \text{ז}$$

$$f(t) = At^6 + Bt + C, \frac{df}{dt} = ? . \text{ח}$$

2) דוגמא 2

חשב את הנגזרות הבאות :

$$y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18}), \frac{dy}{dx} = ? . \text{א}$$

$$y = Ax^5(B + Cx^3), \frac{dy}{dx} = ? . \text{ב}$$

$$y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5), \frac{dy}{dx} = ? . \text{ג}$$

$$y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3), \frac{dy}{dt} = ? . \text{ד}$$

$$x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2), \frac{dy}{dt} = ? . \text{ה}$$

(3) דוגמא 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות:

$$y = (x+2)^4, \frac{dy}{dx} = ? . \text{א.}$$

$$y = 5(8x^2 + x)^5, \frac{dy}{dx} = ? . \text{ב.}$$

$$y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}, \frac{dy}{dx} = ? . \text{ג.}$$

$$f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2, \frac{df}{dt} = ? . \text{ד.}$$

(4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות:

$$y = (x+2)^4, x = 2t, \frac{dy}{dt} = ? . \text{א.}$$

$$y = 5(8x^2 + x)^5, x = 5t^4 + 4, \frac{dy}{dt} = ? . \text{ב.}$$

$$y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}, x = 3t^2 + t, \frac{dy}{dt} = ? . \text{ג.}$$

$$y = x^2, x = t^2, \frac{dy}{dt} = ? . \text{ד.}$$

(5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } y = \sin(ax) \text{ כאשר } a \text{ קבוע.}$$

$$\text{ב. } y = e^{-x^2}$$

(6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^7 dx$$

$$\text{ב. } \int x dx$$

$$\text{ג. } \int dx$$

$$\text{ד. } \int 3dx$$

$$\text{ה. } \int 7x^4 dx$$

$$\text{ו. } \int (5x^2 + 3) dx$$

$$\int (8x^7 + 5x)dx \quad \text{ג.}$$

$$\int Ax^7 dx \quad \text{ח.}$$

$$\int (Ax^7 + Bx)dx \quad \text{ט.}$$

7) דוגמה 2- אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^2 x^5 dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^5 4dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_{-1}^3 7x^4 dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 (2x^2 + 4)dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx)dx \quad \text{ה.}$$

8) דוגמה 3- אינטגרל של פונקציות נוספות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int e^{3x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^5 2e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int e^{ax} dx \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

$$12 \cdot t \cdot \text{ה} \quad 16x \cdot \text{ט} \quad 5 + 36x^{17} \cdot \text{ג} \quad 5a \cdot x^4 \cdot \text{ב} \cdot 20x^3 \cdot \text{א} \quad \text{(1)}$$

$$6At^5 + B \cdot \text{ח} \quad 20t^3 + 3t^2 \cdot \text{ז} \quad 15t^2 \cdot \text{ו}$$

$$5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7 \cdot \text{ב} \quad 20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17}) \cdot \text{א} \quad \text{(2)}$$

$$5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4) \cdot \text{ג}$$

$$(10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2) \cdot \text{ט}$$

$$(6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t) \cdot \text{ח}$$

$$5 + 560t^3(5t^4 + 4)^{13} \cdot \text{ג} \quad 25(8x^2 + x)^4(16x + 1) \cdot \text{ב} \cdot 4(x + 2)^3 \cdot 1 \cdot \text{א} \quad \text{(3)}$$

$$16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2) \cdot \text{ט}$$

$$500t^3 \left(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4 \right) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1) \cdot \text{ב} \quad 8(2t + 2)^3 \cdot \text{א} \quad \text{(4)}$$

$$4t^3 \cdot \text{ט} \quad \left(5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0) \right) \cdot (3 + 2t + 1) \cdot \text{ג}$$

$$e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \text{ב} \quad \cos(ax) \cdot a \cdot \text{א} \quad \text{(5)}$$

$$\frac{7x^5}{5} + C \cdot \text{ה} \quad 3x \cdot \text{ט} \quad x + C \cdot \text{ג} \quad \frac{x^2}{2} + C \cdot \text{ב} \quad \frac{x^8}{8} + C \cdot \text{א} \quad \text{(6)}$$

$$A \frac{x^8}{8} + B \frac{x^2}{2} + C \cdot \text{ט} \quad A \cdot \frac{x^8}{8} + C \cdot \text{ח} \quad x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C \cdot \text{ז} \quad \cdot \text{ו}$$

$$31.875A + 1.5B \cdot \text{ה} \quad 58.67 \cdot \text{ט} \quad 341.6 \cdot \text{ג} \quad 16 \cdot \text{ב} \quad 10.67 \cdot \text{א} \quad \text{(7)}$$

$$\ln\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \text{ח} \quad \frac{2}{3} \cdot \text{ט} \quad \frac{e^{3x}}{3} + C \cdot \text{ג} \quad 0 \cdot \text{ב} \quad 2 \cdot \text{א} \quad \text{(8)}$$

$$\frac{e^{ax}}{a} \cdot \text{ז} \quad -\frac{1}{x} + C \cdot \text{ו}$$

אינטגרל כפול ומשולש:

שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (zx^2 + 3y) dy dx dz$$

1) אינטגרל משולש – דוגמה 1

$$\int_0^3 \int_0^2 3 \cdot x^3 y^2 dx dy$$

2) דוגמה 1

$$\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y) dx dy$$

3) דוגמה 2

$$\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + y) dy dx$$

4) דוגמה 3

$$\int_0^1 \int_0^2 x \cdot z^2 dx dz$$

5) דוגמה 4

$$\int_1^5 \int_0^4 2 \cdot y^3 dy dz$$

6) דוגמה 5

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta$$

7) דוגמה 6

$$\int_a^b \int_0^c 4 \cdot x^2 y dx dy$$

8) דוגמה 7

$$\int_a^b \int_0^c (4z + r^2) dr dz$$

9) דוגמה 8

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 4a \cdot r^2 dr d\theta$$

10) דוגמה 9

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 4yr^2 dr d\theta$$

11) דוגמה 10

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

12) דוגמה 11

תשובות סופיות:

39 (1)

108 (2)

18 (3)

13.33 (4)

$\frac{2}{3}$ (5)

512 (6)

56.55 (7)

$\frac{4c^3}{3} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$ (8)

$2cb^2 + \frac{c^3}{3}b - 2ca^2 - \frac{a^3}{3}$ (9)

$\frac{4aR^3}{3} 2\pi$ (10)

$\frac{8\pi y R^3}{3}$ (11)

$4\pi r^2$ (12)

קואורדינטות אלמנטיים דיפרנציאליים:

שאלות:

1) דוגמה-זווית בין וקטורים

נתונים שני וקטורי מיקום:

הוקטור הראשון, \vec{r}_1 , נתון בקואורדינטות כדוריות כך ש:

$$r = 2m, \theta = 0^\circ, \varphi = 30^\circ$$

הוקטור השני, \vec{r}_2 , נתון בקואורדינטות גליליות כך ש:

$$r = 1m, \theta = 120^\circ, z = 2m$$

א. חשב את אורךו של כל וקטור.

ב. חשב את הזווית בין הוקטוריים.

2) שטח מעגל

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

3) חישוב נפח גליל

חשב נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

$$\alpha = 48.5^\circ \quad \text{ב.} \quad |\vec{r}_1| = 2m, |\vec{r}_2| = \sqrt{5}m \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$S = \pi R^2 \quad (2)$$

$$V = \pi R^2 h \quad (3)$$

צפיפות:**שאלות:****1) דיסקה עם חור**

- מצא את הצפיפות של דיסקה בעל רדיוס R ומסה M ?
 - בדיסקה קדחו חור ברדיוס r .
- מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

$$\text{ב. } M \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad \text{א. } \frac{M}{\pi R^2} \quad (1)$$

צפיפות אינפיטיסימלית:

שאלות:

1) מוט עם צפיפות לא אחידה

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$$

כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: L, λ_0 הם קבועים.

תשובות סופיות:

$$\frac{\lambda_0 L}{2} \quad (1)$$

חשבון דיפרנציאלי:

שאלות:

1) נגזרת סתומה**

נתונה הפונקציה הבאה : $f(x, y) = y^{\sin x} + 6y + e^{x^2+y^2} = 0$

$$\text{ממצא את : } \frac{dy}{dx}$$

2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות**

נתונות קואורדינטות חדשות : $r' = \frac{1}{r^2}, \theta' = \frac{1}{2}\theta$

כאשר r ו- θ הם הקואורדינטות הפולריות.

ממצא את גודלו של אלמנט אורך dl כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

תשובות סופיות:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\ln y)(\cos x)(y^{\sin x}) + 2xe^{x^2+y^2}}{\sin x \cdot y^{(\sin x-1)} + 6 + 2ye^{(x^2+y^2)}} \quad (1)$$

$$dl^2 = \frac{1}{4} r'^{-3} dr'^2 + \frac{1}{r'} 4d\theta'^2 \quad (2)$$