# פיזיקה 1 מכניקה 4910310 ו 4212210 ו 4211010

## פרק 1 - מבוא מתמטי -

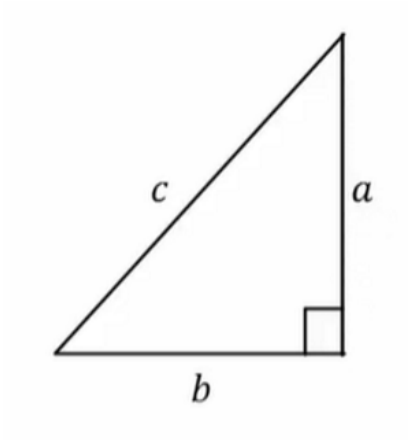
### תוכן העניינים


1. סינוס קוסינוס ומה שביניהם ..... 1
2. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים ..... 5
3. אינטגרל כפול ומשולש ..... 11
4. מעברי יחידות ..... 13
5. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים ..... 15
6. צפיפות ..... 18
7. אלמנט מסה אינפיטיסימלי ..... 19
8. נספח-נגזרת סתומה ואלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות ..... 20

# סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

## רקע

**במשולש ישר זווית:**




$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ליד ניצב}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

**משפט פיתגורס:**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**זהויות:**

| | |
|---|---|
| $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$<br>$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$<br>$\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$ | $90^\circ-\alpha$ |
| $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$<br>$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$<br>$\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$<br>$\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$ | $90^\circ+\alpha$ |
| $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$ | $180^\circ-\alpha$ |
| $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$<br>$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$<br>$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ | $-\alpha$ |
| $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$<br>$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha==1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ | $2\alpha$ |
| $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$<br>$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ | $\alpha\pm\beta$ |

**סכום והפרש של פונקציות:**

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

**ערכים ששווה לזכור:**

| הזווית \הפונקציה | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | לא מוגדר |

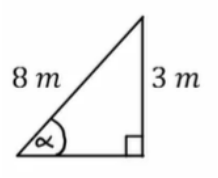
**פתרונות עבור:**

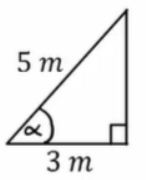
| | |
|---|---|
| $x_1=\alpha+2\pi k$<br>$x_2=\pi-\alpha+2\pi k$ | $\sin x=\sin\alpha$ |
| $x_1=\alpha+2\pi k$<br>$x_2=-\alpha+2\pi k$ | $\cos x=\cos\alpha$ |
| $x=\alpha+\pi k$ | $\tan x=\tan\alpha$ |

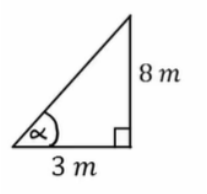
## שאלות:

**1) דוגמה 1-חישוב אלפא**

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

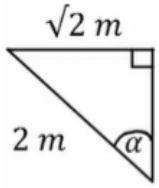
א.


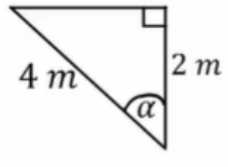

ב.


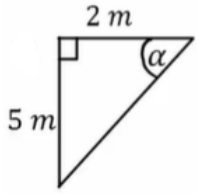

ג.


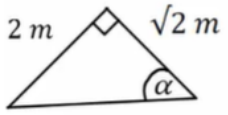

**2) דוגמה 2-משולשים שמסורטטים אחרת**

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

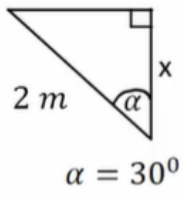
א.


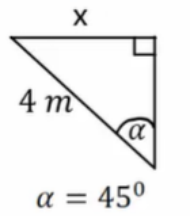

ב.


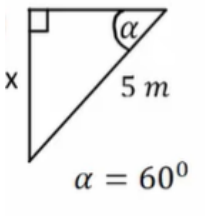

ג.


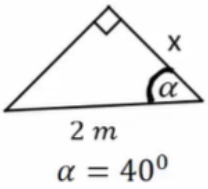

ד.



**3) דוגמה-2-מציאת ניצבים**

א.



ב.



ג.



ד.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $\alpha = 22°$ ב. $\alpha = 53°$ ג. $\alpha = 69°$

**2)** א. $\alpha = 45°$ ב. $\alpha = 60°$ ג. $\alpha = 68.2°$ ד. $\alpha = 55°$

**3)** א. $\sqrt{3m}$ ב. $2\sqrt{2m}$ ג. $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$ ד. $1.53m$

# נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

## רקע

**נגזרות:**

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם $y$ היא פונקציה של $x$ אז הסימון של הנגזרת של $y$ לפי $x$ הוא $\frac{dy}{dx}$ או $y'$.

**נגזרת של פולינום:**

$$y(x) = x^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

**כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:**

$$\left(Ay(x)\right)' = Ay'(x)$$

**נגזרת של מכפלה:**

$$y(x) = f(x)g(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**כלל שרשרת:**

אם $y$ היא פונקציה של $x$ ו- $x$ הוא פונקציה של $t$ אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

**נגזרות של פונקציות נוספות:**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

**אינטגרל:**

פעולה הפוכה לנגזרת.

**אינטגרל של פולינום**

$$\int Ax^n \,\mathrm{d}x = A\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

**מה עושה האינטגרל?**

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

## שאלות:

**1) דוגמה 1**

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=5x^4$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=ax^5$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^{18}$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $f\left(x\right)=8x^2+2$ , $\frac{df}{dx}=?$

ה. $y=6t^2$ , $\frac{dy}{dt}=?$

ו. $x=5t^3$ , $\frac{dx}{dt}=?$

ז. $x=5t^4+t^3+4$ , $\frac{dx}{dt}=?$

ח. $f\left(t\right)=\mathrm{A}t^6+\mathrm{B}t+\mathrm{C}$ , $\frac{df}{dt}=?$

**2) דוגמא 2**

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=\left(5x^4+2\right)\left(5x+2x^{18}\right)$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=\mathrm{A}x^5\left(\mathrm{B}+\mathrm{C}x^3\right)$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5x+2x^2\left(4x+5x^5\right)$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $y=\left(5t^2+1\right)\left(2t+27+5t^3\right)$ , $\frac{dy}{dt}=?$

ה. $x=\left(2t^3+7\right)\left(4t+3+6t^2\right)$ , $\frac{dy}{dt}=?$

### 3) דוגמא 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ג. $y=5t+2(5t^4+4)^{14}$ , $\frac{dy}{dx}=?$

ד. $f(t)=8(5t^4+t^3+4)^2+2$ , $\frac{df}{dt}=?$

### 4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y=(x+2)^4$ , $x=2t$ , $\frac{dy}{dt}=?$

ב. $y=5(8x^2+x)^5$ , $x=5t^4+4$ , $\frac{dy}{dt}=?$

ג. $y=5x+2(5x^4+4)^{14}$ , $x=3t^2+t$ , $\frac{dy}{dt}=?$

ד. $y=x^2$ , $x=t^2$ , $\frac{dy}{dt}=?$

### 5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א. $y=\sin(ax)$ כאשר $a$ קבוע.

ב. $y=e^{-x^2}$

### 6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^7 dx$

ב. $\int x dx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3dx$

ה. $\int 7x^4 dx$

ו. $\int (5x^2+3)dx$

ז. $\int\left(8x^7+5x\right)dx$

ח. $\int \mathrm{A}x^7dx$

ט. $\int\left(\mathrm{A}x^7+\mathrm{B}x\right)dx$

### 7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^2 x^5dx$

ב. $\int_1^5 4dx$

ג. $\int_{-1}^3 7x^4dx$

ד. $\int_0^4\left(2x^2+4\right)dx$

ה. $\int_{-1}^2\left(\mathrm{A}x^7+\mathrm{B}x\right)dx$

### 8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\pi \sin x dx$

ב. $\int_0^\pi \cos\left(2x\right)dx$

ג. $\int e^{3x}dx$

ד. $\int_0^5 2e^{-3x}dx$

ה. $\int_3^5 \frac{1}{x}dx$

ו. $\int \frac{1}{x^2}dx$

ז. $\int e^{ax}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $20x^3$ ב. $5a\cdot x^4$ ג. $5+36x^{17}$ ד. $16x$ ה. $12\cdot t$

ו. $15t^2$ ז. $20t^3+3t^2$ ח. $6At^5+B$

**2)** א. $20x^3\cdot\left(5x+2x^{18}\right)+\left(5x^4+2\right)\left(5+36x^{17}\right)$ ב. $5Ax^4\left(B+Cx^3\right)+3ACx^7$

ג. $5+4x\cdot\left(4x+5x^5\right)+2x^2\left(4+25x^4\right)$

ד. $(10t)\left(2t+27+5t^3\right)+\left(5t^2+1\right)\left(2+0+15t^2\right)$

ה. $\left(6t^2+0\right)\left(4t+3+6t^2\right)+\left(2t^3+7\right)\left(4+0+12t\right)$

**3)** א. $4(x+2)^3\cdot 1$ ב. $25\left(8x^2+x\right)^4(16x+1)$ ג. $5+560t^3(5t^4+4)^{13}$

ד. $16\left(5t^4+t^3+4\right)\left(20t^3+3t^2\right)$

**4)** א. $8(2t+2)^3$ ב. $500t^3\left(8\left(5t^4+4\right)^2+5t^4+4\right)\cdot\left(16\left(5t^4+4\right)+1\right)$

ג. $\left(5+2\cdot 14\left(5x^4+4\right)^{13}\cdot\left(5\cdot 4x^3+0\right)\right)\cdot(3+2t+1)$ ד. $4t^3$

**5)** א. $\cos(ax)\cdot a$ ב. $e^{-x^2}\cdot(-2x)$

**6)** א. $\frac{x^8}{8}+C$ ב. $\frac{x^2}{2}+C$ ג. $x+C$ ד. $3x$ ה. $\frac{7x^5}{5}+C$

ו. ז. $x^8+\frac{5}{2}x^2+C$ ח. $A\cdot\frac{x^8}{8}+C$ ט. $A\frac{x^8}{8}+B\frac{x^2}{2}+C$

**7)** א. 10.67 ב. 16 ג. 341.6 ד. 58.67 ה. $31.875A+1.5B$

**8)** א. 2 ב. 0 ג. $\frac{e^{3x}}{3}+C$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

ו. $-\frac{1}{x}+C$ ז. $\frac{e^{ax}}{a}$

# אינטגרל כפול ומשולש:

## שאלות:

פתרו את האינטגרלים הבאים:

1) **דוגמה 1** $\int_0^3\int_0^2 3\cdot x^3y^2dxdy$

2) **דוגמה 2** $\int_1^2\int_0^3\left(x^2+2y\right)dxdy$

3) **דוגמה 3** $\int_0^2\int_1^3\left(x^2+y\right)dydx$

4) **דוגמה 4** $\int_0^1\int_0^2 x\cdot z^2dxdz$

5) **דוגמה 5** $\int_1^5\int_0^4 2\cdot y^3dydz$

6) **דוגמה 6** $\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2drd\theta$

7) **דוגמה 7** $\int_a^b\int_0^c 4\cdot x^2ydxdy$

8) **דוגמה 8** $\int_a^b\int_0^c\left(4z+r^2\right)drdz$

9) **דוגמה 9** $\int_0^{2\pi}\int_0^R 4\mathrm{a}\cdot r^2drd\theta$

10) **דוגמה 10** $\int_0^{2\pi}\int_0^R 4yr^2drd\theta$

11) **דוגמה 11** $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi d\theta d\varphi$

12) **דוגמה – אינטגרל משולש** $\int_1^2\int_0^2\int_0^3\left(zx^2+3y\right)dydxdz$

## תשובות סופיות:

1) 108
2) 18
3) 13.33
4) $\frac{2}{3}$
5) 512
6) 56.55
7) $\frac{4c^3}{3}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$
8) $2cb^2+\frac{c^3}{3}b-2ca^2-\frac{a^3}{3}$
9) $\frac{4aR^3}{3}2\pi$
10) $\frac{8\pi yR^3}{3}$
11) $4\pi r^2$
12) 39

# מעברי יחידות:

## שאלות:

**1) דוגמה 1**

נתון: $A=2km\ ,\ B=10gr$.

מצא את $C=A\cdot B$ ביחידות של m.k.s.

**2) דוגמה 2**

נתון: $A=2m^2\ ,\ B=3gr\ ,\ C=5c.m\cdot s$

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D=2\cdot A$

ב. $E=\frac{5\cdot B\cdot C}{A}$

**3) מעבר יחידות בחזקות**

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A=1m^2$

ב. $B=1m^3$

**4) סנטימטר בשלישית**

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של $c.m^3$:

א. $5.2m^3$

ב. $320mm^3$

ג. $0.0054km^3$

**5) ליטר, דוגמה**

הבע את הגדלים הבאים ב- Liter :

א. $5m^3$

ב. $5mm^3$

## תשובות סופיות:

1) $20\text{m}\cdot\text{kg}$

2) א. $4\text{m}^2$ ב. $37.5\cdot10^{-5}\frac{\text{sec}\cdot\text{kg}}{\text{m}}$

3) א. $10^4\text{cm}^2$ ב. $10^6\text{cm}^3$

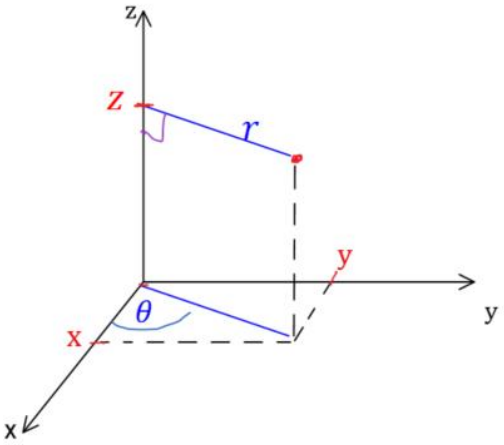
4) א. $5.2\cdot10^6\text{cm}^3$ ב. $0.32\text{cm}^3$ ג. $5.4\cdot10^{12}\text{cm}^3$

5) א. $5\cdot10^3\text{Liter}$ ב. $5\cdot10^{-6}\text{Liter}$

# קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים:

**רקע:**

**קואורדינטות גליליות:** $(r, \theta, z)$




$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

טבעת

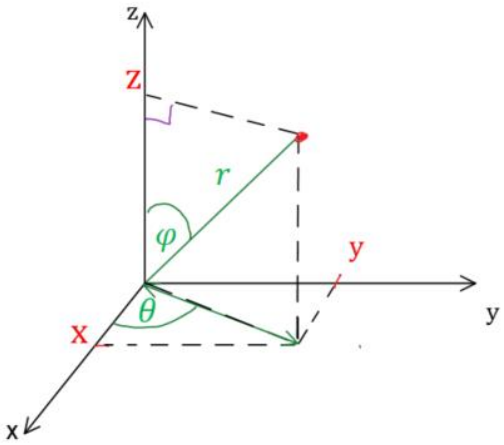
$$dl = r\,d\theta/d\,r/d\,z$$

דיסקה — מעטפת גלילית

$$dS = rd\theta\,d\,r/r\,d\theta\,d\,z/d\,r\,dz$$

גליל מלא

$$dV = rd\theta\,dr\,dz$$




**קואורדינטות כדוריות:** $(r,\theta,\varphi)$

$$z = r\cos\varphi$$

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dl = dr/r\sin\varphi d\theta/r\,d\varphi$$

מעטפת כדור

$$dS = r^2\sin\varphi d\theta\,d\varphi$$

כדור מלא

$$dV = r^2\sin\varphi dr d\theta\,d\varphi$$

## שאלות:

**1) שטח מעגל**

חשבו שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

**2) חישוב נפח גליל**

חשבו נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

## תשובות סופיות:

**1)** $S = \pi R^2$

**2)** $V = \pi R^2 h$

# צפיפות:

## שאלות:

**1) דיסקה עם חור**

א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M?

ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r.
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{M}{\pi R^2}$ ב. $M\left(\frac{r}{R}\right)^2$

# צפיפות אינפיטיסימלית:

## שאלות:

**1) מוט עם צפיפות לא אחידה**

חשב את המסה הכוללת של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$

כאשר $x$ הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט והפרמטרים: $L$ , $\lambda_0$ הם קבועים.

## תשובות סופיות:

**1)** $\frac{\lambda_0 L}{2}$

# חשבון דיפרנציאלי:

## שאלות:

**1) נגזרת סתומה****

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x,y)=y^{\sin x}+6y+e^{x^2+y^2}=0$.

מצא את: $\frac{dy}{dx}$.

**2) אלמנט אורך בהחלפת קואורדינטות****

נתונות קואורדינטות חדשות: $\theta'=\frac{1}{2}\theta$ , $r'=\frac{1}{r^{2'}}$.

כאשר $r$ ו-$\theta$ הם הקואורדינטות הפולריות.

מצא את גודלו של אלמנט אורך $dl$ כפונקציה של הקואורדינטות החדשות.

## תשובות סופיות:

**1)** $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\ln y)(\cos x)\left(y^{\sin x}\right)+2xe^{x^2+y^2}}{\sin x\cdot y^{(\sin x-1)}+6+2ye^{\left(x^2+y^2\right)}}$$

**2)** $$dl^2=\frac{1}{4}r'^{-3}\,dr'^2+\frac{1}{r'}4d\theta'^2$$