פרקים מעשיים בחדוא

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 \, , \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,
ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16 \right\}$

ב. $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16 \right\}$

ג. $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16 \right\}$

ד. $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0 \right\}$

ה. $E = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0 \right\}$

ו. $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4 \right\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:
$A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x\,|\,10<x<20,$ מספר ראשוני $x\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x\,|\,x=2m,$ שלם זוגי $m\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

13) נתון: $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$, $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

18) תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.
טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.
טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.
טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.
איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z?

19) הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0,
אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0.

20) הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה
של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

22) הוכיחו כי אם $|x-x_0|<\varepsilon, |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) $1)\ A\cup B=(-2,4)$, $2)A\cap B=\phi$, $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$,

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

המספרים האי-רציונליים

שאלות

1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p\,|\,a^k \Leftarrow p\,|\,a$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b\,|\,a$,
ונאמר גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

1) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

2) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

3) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

4) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את $\sup A$.

ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את $\inf A$.

5) נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4 \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה הקבוצה $A=\{11-4^n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 1\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S.
הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)

ב. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.

ג. עבור קטעים מהטיפוס $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.

ד. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.

ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S=\sup S$.

12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי: $d(x,A)=\inf\{|x-a| \mid a\in A\}$.
אם $\alpha\in\mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A, הראו כי $d(\alpha,A)=0$.

13) הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

14) הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

15) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K=\{-x \mid x\in K\}$.
הוכיחו שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T.
הוכיחו כי:

א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.

ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.

ג. $\sup S\le\sup T$.

ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S\le\max T$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) יהיו A ו-B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.

א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$, כך ש-$x < y$.

הוכיחו כי $\sup A \le \sup B$.

האם יהיה נכון לומר ש-$\sup A < \sup B$?

ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$, כך ש-$y < x$.

הוכיחו כי $\sup A = \sup B$.

18) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש-$\sup A = \inf B$.

הוכיחו שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-
$x + \delta > y$.

19) נניח ש-A ו-B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש-$\sup A \le \inf B$.

נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר x ב-A, ומספר y ב-B, כך ש-$x + \delta > y$.

הוכיחו כי $\sup A = \inf B$.

20) נניח ש-A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,
ונניח כי $x < \sup A$.

הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה A, שנמצאים בין x ל-$\sup A$.

21) תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי אם $c \ge 0$, אז ל-$c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.

22) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
$\sup(S+T) = \sup S + \sup T$.

23) יהיו S ו-T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.

א. הוכיחו כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.

ב. הוכיחו כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

24) תהיינה S, T, U קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \ge s + t$.
הוכיחו כי $\sup U \ge \sup T + \sup S$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם S ו- T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T, אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$. האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.

ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.

ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים α, β, המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי n, כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכיחו כי α הוא הסופרמום של A.

28) הוכיחו שלכל מס' ממשי c **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \le c < m+1$.
למספר m קוראים הערך השלם של c, ומסמנים $m = [c]$.

29) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n.
הוכיחו כי $a = b$.

30) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.
נניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.
האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

32) לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=0,\ \sup A=1$

2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A=\sup A=\frac{1}{4},\ \inf A=0$

3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=\frac{5}{12},\ \sup A=\frac{1}{2}$

4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=c,\ \inf A=[c]$

5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A=4$

6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A=7$

7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=\frac{4}{5}$, $\min A=\frac{3}{5}$

8) א. $\max A=\frac{5}{4},\quad \inf A=-1$ ב. $\min B=0,\ \max B=2$
ג. $\min C=-2,\quad \sup C=2$ ד. $\inf D=0,\ \sup D=2$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינדוקציה

שאלות

1) הוכיחו באינדוקציה כי $4\cdot 10^n+14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכיחו באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$.

3) מצאו את ה-n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n\geq n^2$,
והוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^n\geq 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\geq -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

5) הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^n<\dfrac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי $n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n\leq 2$

ב. $a_n\leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

8) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$,

אז $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכיחו באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכיחו באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ $\left(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}\right)$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים x,y המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי:
אם $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$, אז $a_1+a_2+\ldots+a_n\geq n$ $(0<a_i\in\mathbb{R})$.

2) נסחו והוכיחו את **אי שוויון הממוצעים**.

3) הוכיחו שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b|\leq|a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b|\leq|a|+|b|$

ג. $|a-b|\geq|a|-|b|,\ \ |a-b|\geq|b|-|a|$

ד. $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ה. $|a+b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ו. $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ $(a_i\in\mathbb{R})$

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכיחו כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R})$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\ge 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\ge 0$

4) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\le 0$

6) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\ge 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$

2) $x\ge 11$ או $x\le 7$

3) כל x

4) $x>3$ או $-3<x<1$

5) $\frac{1}{2}\le x<5$

6) $1\le x\le 6$

7) $-5<x<-1$

8) $2<x<6$

9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$

10) $x>7$ או $x<-5$

11) $x>4$ או $x<-1$

12) $-3\le x<46$

13) $x<0.472$

14) אין פתרון.

כתב ופתר – גיא סלומון ©