מתמטיקה למדעים 1

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות 1
2. המספרים האי-רציונליים 7

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x\forall y:(x+y)^2>0$

ב. $\forall x\exists y:(x+y)^2>0$

ג. $\forall x\forall y\exists z:xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0,\forall y>0\ ,\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n\exists k,n^3-n=6k$ (k ו-n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר n^3-n מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה $A=\{x\mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$:

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

13) נתון: $B=\{13,15,17\}$, $A=\{12,15,18\}$, $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל-$\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,||\,x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$ ב. $A\cup B$

ג. A^c ד. $A\cap B^c$

ה. $A^c\cap B$ ו. $A\cup B^c$

ז. $A^c\cup B$ ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

18) תהיינה X,Y,Z קבוצות כלשהן.

טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.

טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.

טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.

איזו טענה נכונה לכל בחירה של X,Y,Z?

19) הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0,
אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0.

20) הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה
של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

22) הוכיחו כי אם $|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענו אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענו נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענו נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) $1)\ A\cup B=(-2,4)$, $2)A\cap B=\phi$, $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$,

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המספרים האי-רציונליים

שאלות

1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p \mid a^k \Rightarrow p \mid a$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $\left(n,k,N \in \mathbb{N}\right)$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b \mid a$,
ונאמר גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©