אינפי א

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1. אינדוקציה 1
2. המספרים האי-רציונליים 3
3. סימן הסכימה 4
4. אי שוויונים מפורסמים 7
5. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון 8
6. שדות 11

אינדוקציה

שאלות

1) הוכיחו באינדוקציה כי $4\cdot 10^n+14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכיחו באינדוקציה כי $\left(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\right)\ \sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

3) מצאו את ה-n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n\geq n^2$,
והוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^n\geq 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\geq -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

5) הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^n<\frac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי $n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n\leq 2$

ב. $a_n\leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

8) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$,
אז $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}(-1)^n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכיחו באינדוקציה כי 4^n-1 מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכיחו באינדוקציה כי $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$. $\left(n\in\mathbb{N},a\in\mathbb{R}\right)$
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המספרים האי-רציונליים

שאלות

1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p\mid a^k \Rightarrow p\mid a$.
ב. הוכיחו: אם $n\neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $\left(n,k,N\in\mathbb{N}\right)$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b\mid a$,
ונאמר גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

סימן הסכימה

שאלות

1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+\ldots+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\ (a\neq 1)$.

5) חשבו את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכיחו כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360

ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) שאלת הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים x,y המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי:
אם $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$, אז $a_1+a_2+...+a_n\geq n$ $\left(0<a_i\in\mathbb{R}\right)$.

2) נסחו והוכיחו את **אי שוויון הממוצעים**.

3) הוכיחו שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b|\leq|a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b|\leq|a|+|b|$

ג. $|a-b|\geq|b|-|a|$, $|a-b|\geq|a|-|b|$

ד. $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ה. $|a+b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ו. $\left(a_i\in\mathbb{R}\right)$ $|a_1+a_2+...+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכיחו כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $\left(n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R}\right)$ $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{1}{n}$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}$

3) חשבו:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$ ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$ ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

5) הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

6) רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ לכל $k,n\in\mathbb{N}\ ,0\leq k\leq n$.

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) הוכיחו שלכל $n\geq 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$

9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7.
מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x, וחשבו את ערכו.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצאו את n.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}

13) $n = 6$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $\begin{aligned} x\oplus y &= x+y+4 \\ x\otimes y &= 2xy \end{aligned}$

ב. $\begin{aligned} x\oplus y &= x+y \\ x\otimes y &= 2xy \end{aligned}$

ג. $\begin{aligned} x\oplus y &= y \\ x\otimes y &= y^2 \end{aligned}$

2) נתונה הקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in Q\right\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.

ב. הוכיחו כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכיחו כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a = -a$

ב. $(-a)b = a(-b) = -ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $ab = cb \Rightarrow a = c$, לכל a,b,c , בשדה $(b \neq 0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©