

# מתמטיקה לפכ"מ

פרק 1 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## כללי:

### סיכום כללי:

#### הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית  $A \Rightarrow B$ : פירושו: אם  $A$  מתקיים אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $A \Leftrightarrow B$  (אם ורק אם): פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או':  $\vee$ .
- הסימן 'וגם':  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות:

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב-  $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

### עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

### תת-קבוצה:

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן זאת:  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  או  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ .

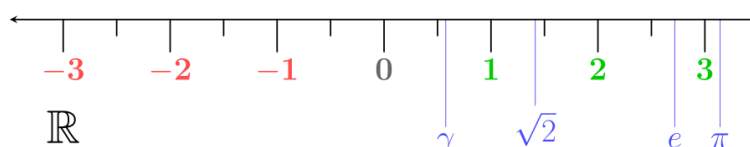
### קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $P$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $P$ ).



### ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים:

| סימון קטעים    | סימון קבוצות                    | תיאור מילולי                                   |
|----------------|---------------------------------|------------------------------------------------|
| $(a, b)$       | $\{x \mid a < x < b\}$          | הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה   |
| $[a, b]$       | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$    | הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה      |
| $[a, b)$       | $\{x \mid a \leq x < b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$ |
| $(a, b]$       | $\{x \mid a < x \leq b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$ |
| $(a, \infty)$  | $\{x \mid a < x < \infty\}$     | הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$         |
| $[a, \infty)$  | $\{x \mid a \leq x < \infty\}$  | הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$        |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid -\infty < x < b\}$    | הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$        |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid -\infty < x \leq b\}$ | הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$       |

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של  $A$  ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת:  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת:  $A \cap B$ .

|            | תכונות החיתוך                           | תכונות האיחוד                           |
|------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
|            | $A \cap B = B \cap A$                   | $A \cup B = B \cup A$                   |
|            | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cup B$ | $A \cap A = A$                          | $A \cup A = A$                          |
|            | $A \cap \emptyset = \emptyset$          | $A \cup \emptyset = A$                  |
|            |                                         | $A \subseteq A \cup B$                  |

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$  המסומן  $A - B$  הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר:  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה:

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא **המשלים** של  $A$  כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן:

$$\bullet (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\bullet (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

### דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

## שאלות:

(1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

(2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ , אם  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

(3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

(4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה :  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$

מי מבין הטענות הבאות נכונה :

ג.  $\{2\} \in A$

ב.  $2 \in A$

א.  $5 \in A$

ו.  $\emptyset \in A$

ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$

ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$

יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$

י.  $\{2, 4\} \in A$

יד.  $\{1, 4\} \in A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות :

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$  :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

(9) הוכח :  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$

א. חשב את  $(A - B) - C$

ב. חשב את  $A - (B - C)$

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**14** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**15** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

ב.  $A \cup B$

א.  $A \cap B$

ד.  $A \cap B^c$

ג.  $A^c$

ו.  $A \cup B^c$

ה.  $A^c \cap B$

ח.  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

ז.  $A^c \cup B$

ט.  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

**17** נתונה הקבוצה :  $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$

רשמו את  $P(A)$ .

**18** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .

ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$ .

**19** הוכיחו כי :  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות:

- 1 א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש-  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש-  $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- 2 א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- 3 א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- 4 א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- 5 הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- 6 א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- 7  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- 8 א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- 9 הוכחה.

10 א.  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ג.  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

11 א.  $A \cup B = (-2, 4)$

ג.  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$

12 א.  $\emptyset$  ב.  $\{4, 5, 6\}$

13 ללא פתרון.

14 הוכחה.

15 א.  $A^c = (-\infty, 1)$  ב.  $B^c = [1, 4]$  ג.  $C^c = [1, 4]$  ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16 ראו סרטון.

17  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\}$

18 הוכחה.

19 הוכחה.