

# Differential Equations for Chemists

פרק 1 - מבוא למספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב ..... 1
2. המספר הצמוד ..... 4
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת ..... 7
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב ..... 8
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב ..... 12

## הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון:  $i = \sqrt{-1}$  מגדירים את המספר מהצורה:  $z = a + bi$  כמספר מרוכב בעל חלק ממשי  $a$  וחלק מדומה  $b$ . המספרים  $a$  ו- $b$  הם ממשיים.  
 $a$  נקרא הרכיב הממשי של  $z$  ומסומן גם  $\text{Re}(z)$  (מלשון: Real).  
 $b$  נקרא הרכיב המדומה של  $z$  ומסומן גם  $\text{Im}(z)$  (מלשון: Imaginary).

שאלות:

(1) רשום עם  $i$ :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של  $a$  ו- $b$  בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(4) כתוב מספר מרוכב  $z$  לפי הדרישות הבאות:

א.  $\text{Re}(z) = -3$ ,  $\text{Im}(z) = 2$ .

ב.  $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(5) מספר מרוכב מסוים  $z$  מקיים:  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$  ו-  $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$ . מצא את  $z$ .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 = -1$       ב.  $x^2 + 36 = 0$       ג.  $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה:  $x^2 + x + 1 = 0$ .

(8) פתור את המשוואה הבאה:  $z^2 + iz + 6 = 0$ .

(9) נתון:  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א.  $z_1 + z_2 =$       ב.  $z_1 - z_2 =$       ג.  $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(-2 + 6i) + (1 - i)$       ב.  $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$   
 ג.  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$       ד.  $5 - (3 - 2i)$   
 ה.  $(i - 3) + 6i$       ו.  $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$       ב.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$   
 ג.  $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$       ד.  $i \cdot (i - 1)$   
 ה.  $(2i + 3) \cdot i$       ו.  $(5i - 1)^2$

12 נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

ידוע כי  $z_1 + z_2$  הוא ממשי וכי  $z_1 - z_2$  הוא מדומה.

א. מצא קשר בין  $a_1$  ל-  $a_2$  וקשר בין  $b_1$  ו-  $b_2$ .

ב. הראה כי המכפלה  $z_1 \cdot z_2$  היא ממשית.

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $i$     ב.  $2i$     ג.  $5i$     ד.  $\sqrt{3}i$     ה.  $\sqrt{5}i$
- (2) א.  $i$     ב.  $-1$     ג.  $-i$     ד.  $1$     ה.  $i$     ו.  $i$
- (3) א.  $a = 2, b = 5$     ב.  $a = 3, b = -1$     ג.  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$     ד.  $a = 0, b = 7$     ה.  $a = -4, b = 0$     ו.  $a = 0, b = 0$
- (4) א.  $z = -3 + 2i$     ב.  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5)  $z = 1.5 + 2.5i$
- (6) א.  $x = \pm i$     ב.  $x = \pm 6i$     ג.  $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
- (7)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8)  $z = 2i, -3i$
- (9) א.  $7 + i$     ב.  $-3 + 5i$     ג.  $16 + 11i$
- (10) א.  $-1 + 5i$     ב.  $1 + 3\frac{1}{2}i$     ג.  $-\sqrt{3}i$     ד.  $2 + 2i$     ה.  $-3 + 7i$     ו.  $11 - 7i$
- (11) א.  $16 + 30i$     ב.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$     ג.  $-25$     ד.  $-1 - i$
- (12) א.  $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$     ב. הוכחה.    ג.  $-2 + 3i$     ו.  $-24 - 10i$

## המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב  $z = a + bi$  קיים מספר צמוד המסומן ב-  $\bar{z}$  וערכו:  $\bar{z} = a - bi$ .

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(14) חשב:

א. $\frac{11 + 2i}{2 - i}$	ב. $\frac{3 + 7i}{2 - 5i}$	ג. $\frac{19 - 9i}{2 - 3i}$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

(15) נתון מספר  $z = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z + 3}$	ג. $\frac{z + i}{z - i}$
------------------	----------------------	--------------------------

(16) המספר  $\frac{3 + 4i}{a - i}$  הוא ממשי טהור. מצא את  $a$ .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

הראה כי כדי שתוצאת החילוק  $\frac{z_1}{z_2}$  תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ .

(18) פתור את המשוואה הבאה:  $3z - 11 = iz - 7i$ .

(19) פתור את המשוואה הבאה :  $iz + 5 = 4i$ .

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה ( $z$  ו- $w$  משתנים מרוכבים) :

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן  $a$  ו- $b$  ממשיים :

ב.  $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$

א.  $2a - 3i = 10 + bi$

(22) פתור את המשוואה הבאה :  $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$ .

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים :

ב.  $\sqrt{8 + 6i}$

א.  $\sqrt{5 - 12i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

א.  $(1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב.  $(-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$

(25) פתור את המשוואה הבאה :  $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$ .

(26) פתור את המשוואה הבאה :  $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$ .

## תשובות סופיות:

- א.  $2-5i$     ב.  $3+i$     ג.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$     ד.  $-7i$     ה.  $-4$     ו.  $0$     (13)
- א.  $4+3i$     ב.  $-1+i$     ג.  $.5+3i$     (14)
- א.  $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$     ב.  $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$     ג.  $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$     (15)
- (16)  $a = -\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18)  $z = 4 - i$
- (19)  $z = 4 + 5i$
- (20)  $z = 2 - 3i, w = 5 + i$
- א.  $a = 5, b = -3$     ב.  $a = 2, b = -1$     (21)
- (22)  $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$
- א.  $z = \pm(3-2i)$     ב.  $z = \pm(3+i)$     (23)
- א.  $z_{1,2} = i, 1$     ב.  $z_{1,2} = -2-i, 2-5i$     (24)
- (25)  $z_1 = -2-5i, z_2 = 3i$
- (26)  $z_1 = -3i, z_2 = 2i$

## חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה:  $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב  $m$  למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

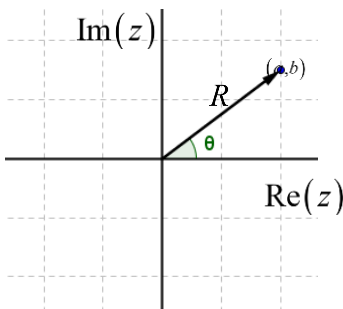
תשובות סופיות:

(27) א.  $m = -i$  ב.  $m = -2i$ .

## מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

### סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב  $z$  ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- $x$  מייצג את  $a$ , גודל הערך הממשי של  $z$ , וציר ה- $y$  מייצג את  $b$ , גודל הערך המדומה של  $z$ . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג  $(a, b)$  או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$ ) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן:  $(R, \theta)$ . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית):  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית:  $a = R \cos \theta$ ,  $b = R \sin \theta$ .
- גודל של מספר מרוכב  $z$  יסומן  $|z|$  ויחושב:  $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים:  $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .
- חילוק מספרים מרוכבים:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ .

## שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. $4$	ח. $-1$	ט. $1$
י. $0$		

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(31) נתון המספר המרוכב  $z = R\text{cis}\theta$ . הבע באמצעות  $R$  ו- $\theta$  את המספרים:

א. $\bar{z}$	ב. $1/z$	ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$	ה. $iz$	ו. $z \cdot \bar{z}$

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$	ב. $z \cdot \bar{z}$	ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$
------------------	----------------------	--

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2 - \bar{z}^2$	ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
----------------------	--------------------------------------

(34) הוכח את הטענות הבאות:

א.  $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$       ב.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו  $\sqrt{2}$  במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא  $30^\circ$  חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(39)  $z$  הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א.  $\bar{z}$       ב.  $\frac{1}{z}$       ג.  $\frac{z}{\bar{z}}$       ד.  $z \cdot \bar{z}$

## תשובות סופיות:

- (28) א.  $1 + \sqrt{3}i$     ב.  $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$     ג.  $2\sqrt{3} - 2i$     ד.  $2\sqrt{3} - 2i$
- ה.  $2\sqrt{3} - 2i$     ו.  $8i$     ז.  $-3i$     ח.  $-1$     ט.  $1$
- (29) א.  $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$     ב.  $2\text{cis}330^\circ$     ג.  $\text{cis}240^\circ$     ד.  $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה.  $6\text{cis}90^\circ$     ו.  $\text{cis}270^\circ$     ז.  $4\text{cis}0^\circ$     ח.  $\text{cis}180^\circ$     ט.  $\text{cis}0^\circ$
- (30) א.  $-6$     ב.  $5\text{cis}170^\circ$     ג.  $4\text{cis}225^\circ$     ד.  $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה.  $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א.  $R\text{cis}(-\theta)$     ב.  $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$     ג.  $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד.  $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$     ה.  $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$     ו.  $R^2$
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35)  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36)  $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37)  $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38)  $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל.    ב. בתוך המעגל.    ג. על המעגל.    ד. מחוץ למעגל.

## נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב  $z$  בחזקת  $n$  נעזר בקשר:  $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$ .

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש  $n$ -י של מספר מרוכב  $z$  השווה למספר מרוכב אחר  $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 / \sqrt[n]{\phantom{x}} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א.  $(2\text{cis}30^\circ)^3$       ב.  $(2\text{cis}14^\circ)^5$       ג.  $(1+i)^4$

ד.  $(\sqrt{3}-i)^3$       ה.  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41 פתור את המשוואות הבאות:

א.  $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$       ב.  $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$       ג.  $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43 נתון המספר המרוכב  $z = x+iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z|=2$ .

(44) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z - 3i| = 5$ .

(45) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה:  $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$ .

### תשובות סופיות:

(40) א.  $8i$       ב.  $32\text{cis}70^\circ$       ג.  $-4$       ד.  $-8i$       ה.  $1$ .

(41) א.  $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$ .

ב.  $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$ .

ג.  $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$ .

(42) סכום:  $0$ , מכפלה:  $-1$ .

(43)  $x^2 + y^2 = 4$ .

(44)  $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

(45)  $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$ .