

מבוא לסטטיסטיקה

פרק 26 - מבוא ללרגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 1

מבוא לקורס:

רקע:

הגדרות וסימונים:

משתנה אמפירי – תוצאותיו ידועות מראש (למשל: רמת הכנסה, גיל, מס' שנות לימוד במדגם מסוים).

משתנה מקרי – תוצאותיו לא ידועות מראש (כגון תוצאה בהטלת קובייה או בהטלת מטבע). באקונומטריקה נעסוק בעיקר במשתנים מקריים.

שני סוגי המשתנים יסומנו באות לועזית עם אינדקס (למשל: X_t או Y_t).
קבוע – מקבל ערך אחד בלבד (מסומן באות לועזית ללא אינדקס – למשל a או b).
 לכל משתנה מקרי X_t יש תוחלת המייצגת את מרכז ההתפלגות (μ_X או $E(X)$).
השונות – מייצגת את מידת הפיזור של ההתפלגות (σ_X^2 או $V(X)$).

סטית התקן – היא השורש של השונות (σ_X).

שונות משותפת (covariance) – מדד להתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים ומייצגת את הכיוון של הקשר ביניהם ($\text{Cov}(X, Y)$):

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ בלתי מתואמים.}$$

$$\text{Cov}(X, Y) > 0 \Leftrightarrow \text{מתאם חיובי בין המשתנים.}$$

$$\text{Cov}(X, Y) < 0 \Leftrightarrow \text{מתאם שלילי בין המשתנים.}$$

$$X, Y \text{ בלתי תלויים} \Leftarrow X, Y \text{ בלתי מתואמים.}$$

מקדם המתאם של פירסון – מדד לכיוון ולעוצמת הקשר הליניארי בין שני

$$\text{משתנים: } \eta_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

$$\eta = 1 \text{ מתאם ליניארי חיובי מלא בין שני המשתנים.}$$

$$\eta = -1 \text{ מתאם ליניארי שלילי מלא בין שני המשתנים.}$$

$$\eta = 0 \text{ לא קיים מתאם ליניארי בין שני המשתנים.}$$

אמידה:

פרמטר – ערך המשתנה הנחקר המתאר את כל האוכלוסייה.
סטטיסטי/אומד – ערך המשתנה הנחקר המתאר את המדגם.

מדגם	אוכלוסייה
$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$E(X) = \mu$
$S_X^2 = \frac{S_{XX}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$	$V(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$
$\frac{S_{XY}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$	$\text{cov}(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$
$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}} \sqrt{S_{YY}}}$	$\eta_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$

נוסחאות וחוקים בסטטיסטיקה:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים, ו- a, b קבועים:

חוקי הסיגמה:

$$1. \sum_{t=1}^T X_t = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_T$$

$$2. \sum_{t=1}^T a = Ta \quad \text{סכום של קבוע:}$$

$$3. \sum_{t=1}^T aX_t = a \sum_{t=1}^T X_t \quad \text{סכום של קבוע כפול משתנה = לקבוע כפול הסכום:}$$

$$4. \sum_{t=1}^T (X_t \pm Y_t) = \sum_{t=1}^T X_t \pm \sum_{t=1}^T Y_t \quad \text{סכום של סכום/הפרש = לסכום/הפרש הסכומים:}$$

$$5. \sum_{t=1}^T X_t^2 \neq \left(\sum_{t=1}^T X_t \right)^2 \quad \text{יש לשים לב כי:}$$

$$\sum_{t=1}^T X_t Y_t \neq \sum_{t=1}^T X_t \sum_{t=1}^T Y_t$$

הגדרות ופיתוחים:

1. סכום הסטיות מהממוצע $= 0$: $\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) = 0$
2. סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע (מונה השונות):

$$S_{XX} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T X_t^2 - T\bar{X}^2 = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})X_t$$
3. מונה של השונות המשותפת:

$$S_{XY} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T X_t Y_t - T\bar{X}\bar{Y} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})Y_t = \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})X_t$$

חוקי התוחלת:

1. תוחלת של קבוע = קבוע: $E(a) = a$
2. תוחלת של סכום/הפרש = לסכום/הפרש התוחלות:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E\left(\sum (X_i)\right) = \sum E(X_i)$$
3. תוחלת של כפל/חילוק $\neq$ לכפל/חילוק התוחלות:

$$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) \neq \frac{E(X)}{E(Y)}$$

$$E(X^2) \neq [E(X)]^2$$
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על התוחלת:

$$E\left(a + \frac{1}{a}X \pm b\right) = a + \frac{1}{a} \cdot E(X) \pm b$$

חוקי השונות:

1. עבור X ו- Y בלתי תלויים/בלתי מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש = סכום השונות:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V\sum(X_i) = \sum V(X_i)$$
2. עבור X ו- Y תלויים/מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש $\neq$ סכום השונות:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \cdot Cov(X, Y)$$

$$V(a) = 0$$

3. שונות של קבוע = 0 : $V(a \pm x) = V(X)$

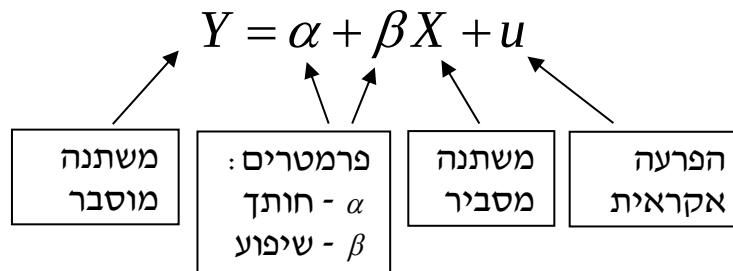
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על השונות : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

- חוקי התוחלת והשונות מתייחסים למשתנים אמפיריים כאל קבועים (יוצאים מחוץ לתוחלת או לשונות).
חוקי הסכימה מתייחסים למשתנים אמפיריים כמשתנים הנשארים בתוך הסיגמא (רק הקבועים ייצאו מחוץ לסיגמא).

חוקי השונות המשותפת :

1. שונות משותפת בין משתנה לקבוע = 0 : $\text{cov}(X, a) = 0$
2. שונות משותפת של משתנים המוכפלים בקבוע : $\text{cov}(aX, bY) = ab \cdot \text{cov}(X, Y)$
3. שונות משותפת של משתנה עם עצמו = שונות המשתנה : $\text{cov}(X, X) = V(X)$
 $\text{cov}(Y, Y) = V(Y)$

המודל האקונומטרי :



1. במודל : $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).

2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α ו- $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β .

3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. מסומנים בד"כ ע"י 'כובעי' - $\hat{\beta}$.
אומדים אחרים מסומנים בד"כ ע"י 'תלתלי' - $\tilde{\beta}$.

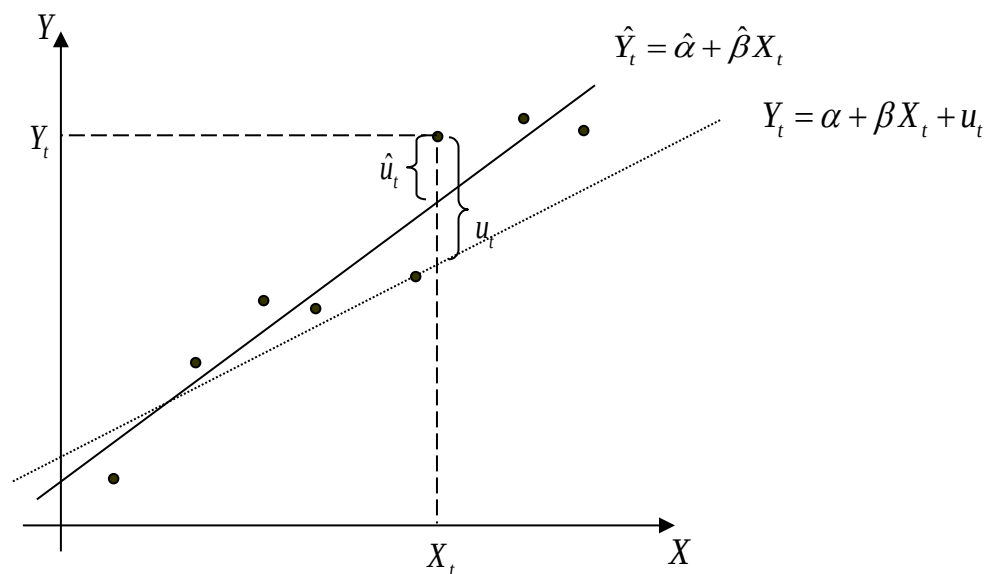
4. בעוד α ו- β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים כיוון שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ אחרים.

5. את α ו- β לא ניתן לדעת (אלא רק לאמוד מנתוני המדגם) – הקו האמיתי באוכי לא ידוע.

6. אפשר לדעת את $\hat{u}_t$, שהיא הסטיה מקו הרגרסיה במדגם:

- עבור X_t , הערך הצפוי של המשתנה המוסבר $(\hat{Y}_t)$ המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t$.

- הסטיה של התצפית (Y_t) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה $(\hat{Y}_t)$ היא: $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.



— קו הרגרסיה הנאמד (במדגם)
 קו הרגרסיה האמיתי באוכלוסייה
 • תצפית בודדת

שאלות:

(1) הבא נוכיח את הזהויות הבאות:

$$א. \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T X_t^2 - T\bar{X}^2$$

$$ב. \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})X_t$$

$$ג. \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) = 0$$

$$ד. \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})X_t} = 1$$

$$ה. \sum_{t=1}^T (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t)(x_t - \bar{x}) = \hat{\beta} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2$$

$$ו. \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T X_t Y_t - T\bar{X}\bar{Y}$$

$$ז. \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})Y_t$$

(2) בטא באמצעות: $\text{cov}(x, y)$, $\text{var}(x)$, $\text{var}(y)$ והקבועים a ו- b את הביטויים

הבאים:

$$א. \text{Var}(ax)$$

$$ב. \text{Var}(x + y)$$

$$ג. \text{Var}(ax + b)$$

$$ד. \text{Cov}(x, ay)$$

$$ה. \text{Cov}(x + a, y + b)$$

$$ו. \text{מקדם המתאם בין } x \text{ ל-} y$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. $a^2 \text{var}(x)$ ב. $\text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x, y)$ ג. $a^2 \text{var}(x)$ ד. $a \text{cov}(x, y)$

$$ה. \text{cov}(x, y) \quad ו. r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)} \cdot \sqrt{\text{var}(y)}}$$