

קורס השלמה במתמטיקה

פרק 19 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף..... 1
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף..... 4
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף..... 5
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף..... 6
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל..... 7

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

תשובות סופיות

| | | | | |
|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{1}{6}$ (5) | 4 (4) | $n-1$ (3) | $\frac{20}{17}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\ln \frac{a}{b}$ (10) | 1 (9) | $-\frac{3}{2}$ (8) | $\frac{5}{6}$ (7) | $\frac{3}{2}$ (6) |
| 1 (15) | 2 (14) | $-\frac{1}{2}$ (13) | $\frac{1}{6}$ (12) | $\frac{1}{2}$ (11) |
| $\frac{1}{2}$ (20) | $\frac{1}{6}$ (19) | $\frac{a}{b}$ (18) | $\frac{a}{b}$ (17) | 1 (16) |
| $-\frac{1}{2}$ (25) | $-\frac{1}{3}$ (24) | $\frac{1}{3}$ (23) | $\frac{1}{8}$ (22) | $\frac{1}{2}$ (21) |
| $\frac{1}{2}$ (30) | $\frac{2}{3}$ (29) | 1 (28) | 1 (27) | $-\frac{3}{4}$ (26) |
| 0 (35) | ∞ (34) | 0 (33) | ∞ (32) | $\frac{1}{2}$ (31) |

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

| | | | | |
|-------|-------------------|-------|-------|--------------|
| 0 (5) | 0 (4) | 0 (3) | 0 (2) | ∞ (1) |
| | $\frac{5}{2}$ (9) | 6 (8) | 0 (7) | 0 (6) |

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

| | | |
|--|---|--|
| $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2) | $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4) |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9) | $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8) | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7) |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12) | $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10) |
| $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ (15) | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13) |

תשובות סופיות

| | | | | |
|-----------|----------------|---------------|-----------|---------|
| e^2 (5) | 1 (4) | 1 (3) | 1 (2) | e (1) |
| 1 (10) | $e^{-1/2}$ (9) | $e^{1/3}$ (8) | e^3 (7) | 1 (6) |
| 0 (15) | e (14) | 1 (13) | e (12) | 1 (11) |

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.
הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$