# מתמטיקה למנהל עסקים

## פרק 12 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים


1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 1
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 3
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 4
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 5
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 6

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות **1-3** (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

**2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות בשאלות **4-8** (ביטויים אי-רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

**8)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-12** (פונקציות חזקה):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ \ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

**12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות בשאלות **13-15** (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

**14)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

**16)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

**17)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$

**18)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+x+1}{e^x}$

**19)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

**20)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{5}{6}$ **2)** $\frac{20}{17}$ **3)** $n-1$ **4)** $4$ **5)** $\frac{1}{6}$

**6)** $\frac{3}{2}$ **7)** $\frac{5}{6}$ **8)** $-\frac{3}{2}$ **9)** $1$ **10)** $\ln\frac{a}{b}$

**11)** $\frac{1}{2}$ **12)** $\frac{1}{6}$ **13)** $-\frac{1}{2}$ **14)** $2$ **15)** $1$

**16)** $\frac{1}{2}$ **17)** $\frac{1}{2}$ **18)** $\infty$ **19)** $0$ **20)** $0$

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}\left(x^{2}-9\right)\cdot\ln\left(x-3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0

5) 0 6) 6 7) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{2}$

**2)** $\frac{1}{2}$

**3)** $-\frac{1}{2}$

**4)** $\frac{1}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

**3)** $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

## תשובות סופיות

**1)** $e$

**2)** 1

**3)** 1

**4)** 1


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

**1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

## תשובות סופיות

**1)** $1$

**2)** $\frac{1}{4}$