

# מבוא מתמטי לפיסיקאים 1 (ממפיס 1)

פרק 10 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.....1
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.....4
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.....5
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.....6
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.....7

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

|                       |                    |                    |                    |                    |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{1}{6}$ (5      | 4 (4               | $n-1$ (3           | $\frac{20}{17}$ (2 | $\frac{5}{6}$ (1   |
| $\ln \frac{a}{b}$ (10 | 1 (9               | $-\frac{3}{2}$ (8  | $\frac{5}{6}$ (7   | $\frac{3}{2}$ (6   |
| 1 (15                 | 2 (14              | $-\frac{1}{2}$ (13 | $\frac{1}{6}$ (12  | $\frac{1}{2}$ (11  |
| $\frac{1}{2}$ (20     | $\frac{1}{6}$ (19  | $\frac{a}{b}$ (18  | $\frac{a}{b}$ (17  | 1 (16              |
| $-\frac{1}{2}$ (25    | $-\frac{1}{3}$ (24 | $\frac{1}{3}$ (23  | $\frac{1}{8}$ (22  | $\frac{1}{2}$ (21  |
| $\frac{1}{2}$ (30     | $\frac{2}{3}$ (29  | 1 (28              | 1 (27              | $-\frac{3}{4}$ (26 |
| 0 (35                 | $\infty$ (34       | 0 (33              | $\infty$ (32       | $\frac{1}{2}$ (31  |

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

|       |                   |       |       |              |
|-------|-------------------|-------|-------|--------------|
| 0 (5) | 0 (4)             | 0 (3) | 0 (2) | $\infty$ (1) |
|       | $\frac{5}{2}$ (9) | 6 (8) | 0 (7) | 0 (6)        |

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשבו את הגבולות הבאים:

|                                                          |                                                                               |                                                                              |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)              | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2)                                | $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)                               |
| $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)                                     | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)   |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)         | $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)                       | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7) |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)    | $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)                                  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)                                   |
| $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ (15)   | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14) | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)                           |

### תשובות סופיות

|           |                |               |           |         |
|-----------|----------------|---------------|-----------|---------|
| $e^2$ (5) | 1 (4)          | 1 (3)         | 1 (2)     | $e$ (1) |
| 1 (10)    | $e^{-1/2}$ (9) | $e^{1/3}$ (8) | $e^3$ (7) | 1 (6)   |
| 0 (15)    | $e$ (14)       | 1 (13)        | $e$ (12)  | 1 (11)  |

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3) \qquad \frac{1}{4} \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$