# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 11 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים


1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 1
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 4
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 5
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 6
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 7

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

**2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

**8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ \ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

**12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

**14)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

**16)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

**17)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

**18)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

**19)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

**20)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

**21)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

**22)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

**23)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

**24)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

**25)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

**26)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

**27)** $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$

**28)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sinh x}$

**29)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

**30)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

**31)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$

**32)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+x+1}{e^x}$

**33)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

**34)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

**35)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$
2) $\frac{20}{17}$
3) $n-1$
4) $4$
5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$
7) $\frac{5}{6}$
8) $-\frac{3}{2}$
9) $1$
10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$
12) $\frac{1}{6}$
13) $-\frac{1}{2}$
14) $2$
15) $1$
16) $1$
17) $\frac{a}{b}$
18) $\frac{a}{b}$
19) $\frac{1}{6}$
20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$
22) $\frac{1}{8}$
23) $\frac{1}{3}$
24) $-\frac{1}{3}$
25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$
27) $1$
28) $1$
29) $\frac{2}{3}$
30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$
32) $\infty$
33) $0$
34) $\infty$
35) $0$

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 6 9) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

**2)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

**3)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

**5)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

**6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $0$

**2)** $\frac{1}{2}$

**3)** $\ln\frac{3}{5}$

**4)** $\frac{1}{2}$

**5)** $-\frac{1}{2}$

**6)** $\frac{1}{3}$

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

**3)** $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

**8)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

**9)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

**12)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

**13)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$

**14)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to 1^-} [\ln(1-\ln x)]^{x-1}$

## תשובות סופיות

**1)** $e$ **2)** $1$ **3)** $1$ **4)** $1$ **5)** $e^2$

**6)** $1$ **7)** $e^3$ **8)** $e^{1/3}$ **9)** $e^{-1/2}$ **10)** $1$

**11)** $1$ **12)** $e$ **13)** $1$ **14)** $e$ **15)** $0$

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.

לבסוף, חשבו את הגבול.

**1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

## תשובות סופיות

**1)** $1$

**2)** $\frac{1}{4}$

**3)** $\frac{3}{4}$