מכניקה 90903

פרק 7 - כוחות מדומים (עקרון דלאמבר)

תוכן העניינים

1. הסבר על כוחות מדומים ומערכת הנעה בקו ישר 1
2. כוחות מדומים במערכת מסתובבת - הצנטרפוגלי והקוריאוליס 5
3. תרגילים עם הקוריאוליס והצנטריפוגלי 6

הסבר על כוחות מדומים ומערכת הנעה בקו ישר

רקע

כוח מדומה מוסיפים רק כאשר **<u>הצופה</u>** נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית). אם הצופה לא בתאוצה (מערכת אינרציאלית) אז אין כוחות מדומים לא משנה מה תנועת הגוף

החוק השני של ניוטון עבור צופה נמצא בתאוצה (מערכת לא אינרציאלית)

$$-m\vec{a}_0 + \Sigma\vec{F}_{\text{אמיתיים}} = m\vec{a}'$$

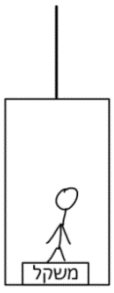
$\vec{a}'$ - תאוצת הגוף ביחס לצופה

$\Sigma\vec{F}_{\text{אמיתיים}}$ - כוחות שיש מי שמפעיל אותם, מופיעים גם במערכת המעבדה.

$-m\vec{a}_0$ - הכוח המדומה, כאשר m היא מסת הגוף הנמדד ו- $\vec{a}_0$ היא תאוצת הצופה

שאלות

1) דוגמה-משקל במעלית



אדם עומד על משקל בתוך מעלית. מסת האדם היא 70 ק"ג.
המעלית עולה מקומת הקרקע לקומה 15.

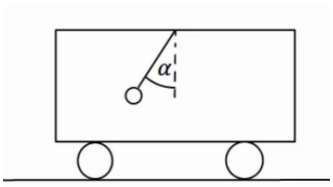
בתחילת התנועה המעלית מאיצה בקצב קבוע של $3\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

החל מקומה 2 המעלית נעה במהירות קבועה עד לקומה 12.

החל מקומה 12 המעלית מאטה בקצב קבוע של $4\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

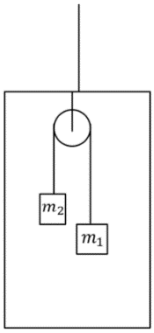
עד לעצירה בקומה 15.
מצא מה מורה המשקל בכל רגע במהלך תנועת המעלית.
פתור פעם אחת מנקודת מבט של צופה מהקרקע
ופעם נוספת מנקודת מבט של צופה הנמצא בתוך המעלית.

2) מכשיר למדידת תאוצה



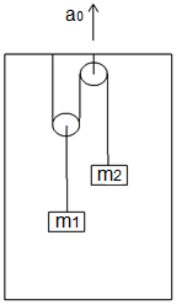
מטוטלת קשורה לתקרת מכונית.
המטוטלת נמצאת בזווית קבועה ונתונה α, ביחס לאנך מתקרת המכונית.
מצא מהי תאוצת המכונית (גודל וכיוון).
פתור פעם אחת מנקודת מבט של צופה מהקרקע ופעם שניה מנקודת מבטו של צופה בתוך המכונית.

3) מכונת אטווד במעלית



שתי מסות: $m_1 = 5kg$ ו- $m_2 = 3kg$ מחוברות באמצעות חוט דרך גלגלת אידיאלית הקשורה לתקרת מעלית.
המערכת מתחילה ממנוחה ותאוצת המעלית היא: $a_0 = 2\frac{m}{sec^2}$ כלפי מעלה.
הגובה של m_1 מעל רצפת המעלית הוא: $h = 5m$.
כמה זמן ייקח ל- m_1 להגיע אל רצפת המעלית?

4) גלגלות נעות במעלית*



מערכת הגלגלות המתוארת באיור תלויה מתקרת מעלית העולה בתאוצה קבועה a_0. כל הגלגלות הינן חסרות מסה.

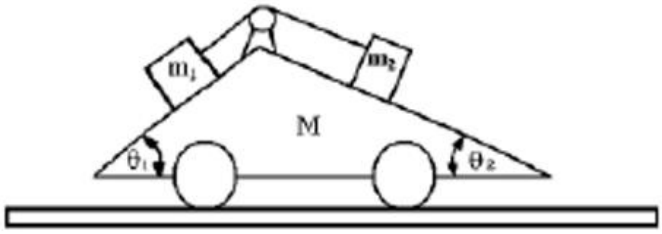
א. מצאו את תאוצת המסות.

ב. ידוע כי $m_1 > 2m_2$.

עוזבים את המערכת ממנוחה כאשר המסה m_1 נמצאת מטר מעל לרצפת המעלית.
תוך כמה זמן תפגע המסה m_1 ברצפת המעלית?

5) תרגיל חי משנקר - משולש עם שתי מסות*

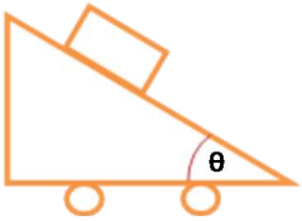
באיור מתוארת עגלה שמסתה M המורכבת משני מישורים משופעים חלקים.
שתי מסות נקודתיות m_1 ו- m_2 מחוברות ביניהן בחוט העובר בגלגלת אידיאלית.
המישורים המשופעים והמישור האופקי עליו נעה העגלה חלקים.



נתונים: $M=35kg$, $m_1=10kg$, $m_2=5kg$, $\theta_1=45°$, $\theta_2=30°$.
משחררים את המסות הנקודתיות ממצב מנוחה והן מחליקות על המישורים המשופעים.
חשב את תאוצת העגלה ביחס לקרקע (גודל וכיוון).

6) מכונית משולשת**

בציור מתוארת מכונית משולשת עם זווית ראש θ.
על המכונית ישנה מסה M ובין המכונית למסה קיים חיכוך.
נתון כי: $\mu_k=\mu_s=0.2$, $\sin\theta=0.6$.



א. מהו התנאי שהתאוצה a צריכה לקיים על מנת שהמסה לא תחליק מטה?

ב. כעת, נתון כי $a=0.2g$.
חשב את תאוצת הגוף במערכת העגלה.

ג. חשב את תאוצת הגוף במערכת המעבדה $(a=0.2g)$.

ד. כעת נתון כי העגלה נעה שמאלה.
מה צריכה להיות התאוצה הקריטית שמאלה של העגלה כדי שהמשקולת תינתק מהמישור המשופע?

תשובות סופיות

1) קומות 0-2 : 91kg , קומות 2-12 : 70kg , קומות 12-15 : 42kg

2) $a_x = g\tan\alpha$, ימינה.

3) $t = 1.83\sec$

4) א. $a_1 = \frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}(a_0 + g)$, $a_2 = -2(a_0 + g)\frac{2m_2 - m_1}{2m_2 + m_1}$

ב. $t = \sqrt{\frac{(4m_2 + m_1)\cdot 2}{(m_1 - 2m_2)(a_0 + g)}}$

5) $a_M = 1.16\frac{m}{\sec^2}$

6) א. $a \geq 0.48g$ ב. $a_x' = 0.256g$ ג. $a_x = 0.4g$, $a_y = 0.15g$ ד. $a = 1.33g$

כוחות מדומים במערכת מסתובבת - הצנטרפוגלי והקוריאוליס

רקע

הכוחות מדומים הנוספים במקרה של צופה מסתובב במהירות זוויתית קבועה:

הכוח הצנטריפוגלי

$$\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$$

צורה יותר כללית $\vec{F} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

כוח קוריאוליס

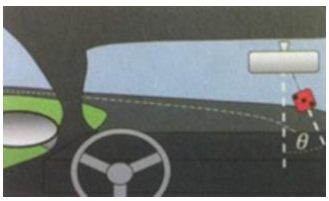
$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

כאשר בשתי הנוסחאות ω הוא של <u>הצופה</u> (ולא של הגוף)
$\vec{v}'$ - מהירות הגוף ביחס לצופה
$\vec{r}$ - וקטור המיקום של הגוף

תרגילים עם הקוריאוליס והצנטריפוגלי:

שאלות:

1) מכונית בסיבוב עם קובייה תלויה

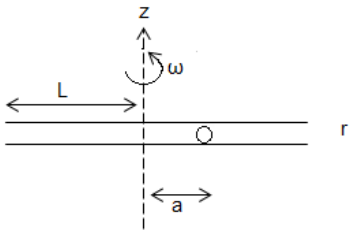


נהג מסתובב עם מכוניתו סביב כיכר שרדיוסה $R = 50m$, במהירות $v = 20\frac{m}{sec}$.
על מראת המכונית תלויה קובייה שמסתה $m = 0.1kg$.

א. במערכת הייחוס של הנהג, מהו הכוח המדומה (הכוח הצנטריפוגלי) הפועל על הקובייה?

ב. מצאו, פעם במערכת הייחוס של צופה מן הצד ופעם במערכת הייחוס של הנהג, את הזווית בה תלויה הקובייה ביחס לאנך בשיווי-משקל.

2) כדור בצינור מסתובב



צינור גלילי באורך 21 מסתובב במהירות זוויתית ω סביב ציר אנכי הניצב לצינור ועובר במרכזו.
גוף בעל מסה m נע ללא חיכוך בתוך הצינור.
נתון כי הגוף מתחיל ממנוחה ובמרחק a ממרכז הצינור. (לצורך השאלה יש להתעלם מכוח הכובד).

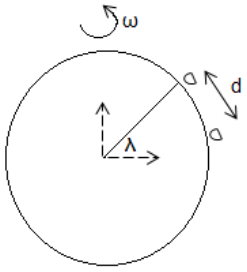
א. מצא את הכוחות הפועלים על החלקיק במערכת הצינור המסתובב.

ב. חשב את המהירות כפונקציה של הזמן וכפונקציה של המרחק מהציר. (פתור את המשוואה הדיפרנציאלית בעזרת הכפלה ב- $\dot{r}$).

ג. מצא את הזמן בו הגוף ייצא מהצינור.

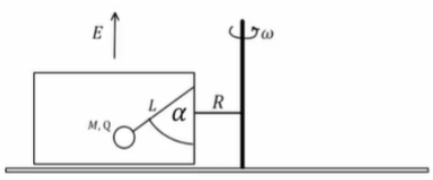
ד. רשום את משוואת התנועה של הגוף בצינור במידה וקיים כוח חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון μ.

3) סירה יורה פגז



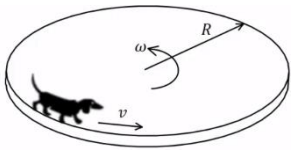
סירה נמצאת בקו רוחב λ יורה פגז במהירות v לעבר סירה אחרת הנמצאת במרחק d ממנה לכיוון דרום.
נתון מהירות כדור הארץ היא ω.
מצא את הסטייה במיקום הפגז בעקבות כוח קוריאוליס.
הזנח את ההשפעה של הכוח על רכיבי המהירות בכיוון מזרח מערב ובכיוון אנך לכדור הארץ.
הנח כי הפגז נע בקו ישר והתעלם מהתנועה הבליסטית.

4) מטוטלת בתוך תיבה מסתובבת



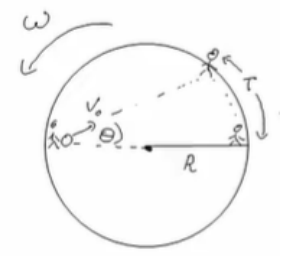
תיבה קשורה בחבל שאורכו R למוט המסתובב במהירות זוויתית ω.
תולים מטוטלת שאורכה L ומסתה M מהקיר של התיבה.
המסה שבקצה המטוטלת היא גוף בעל מטען חשמלי Q הנמצא בשדה חשמלי E כלפי מעלה (גוף טעון הנמצא בשדה חשמלי מרגיש כוח שגודלו QE וכיוונו בכיוון השדה החשמלי).
חשבו את הזווית של המטוטלת עם הקיר במצב שיווי משקל.
הניחו ש- $R << L\sin\alpha$.

5) זיגי הולך על השפה של דיסקה מסתובבת



זיגי הכלב רץ במהירות קבועה v לאורך היקפה של דיסקה המסתובבת במהירות זוויתית ω.
המהירות v נתונה ביחס לדיסקה.
משקלו של זיגי הוא m ורדיוס הדיסקה הוא R.
מהו כוח החיכוך הפועל על זיגי מהדיסקה (גודל וכיוון)?

6) יוסי ודני מתמסרים על דסקה מסתובבת

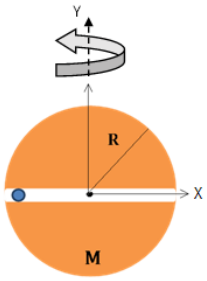


יוסי ודני עומדים זה מול זה על גבי דיסקה בעלת רדיוס R המסתובבת במהירות זוויתית ω סביב צירה.
האנשים קבועים במקומם על שפת הדיסקה כאשר מרכז הדיסקה נמצא בדיוק ביניהם.
יוסי מגלגל כדור קטן על הדיסקה שמגיע לדני כעבור זמן T.

א. מצא את מהירות הזריקה (גודל וכיוון) יחסית לדיסקה.
בצע את החישוב במערכת המעבדה.

ב. מצא את משוואת התנועה של המסה במערכת הדיסקה בעזרת מערכת קואורדינטות פולריות היחסית למערכת ומרכז הדיסקה.

7) חלקיק במנהרה



חלקיק נקודתי בעל מסה m נע בתוך מנהרה ישרה העוברת במרכז כדור הארץ (הנח כי מסת כדור הארץ ורדיוסו ידועים וצפיפותו אחידה).
נתון גם כי כדור הארץ מסתובב במהירות זוויתית ω.
על החלקיק פועל כוח חיכוך השווה ל- μN כאשר N הוא הכוח הנורמאלי הפועל מדופן המנהרה.

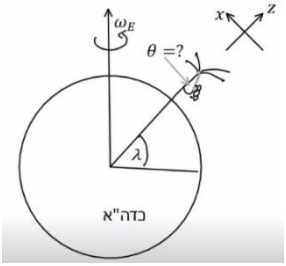
א. מהו גודל כוח הכובד בתוך הכדור כתלות במרחק ממרכזו?
התייחס לנוסחה המלאה של כוח הכובד: $\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$.
(כאשר G הוא קבוע נתון, r הוא המרחק ממרכז הכדור).

ב. מהם הכוחות הצנטריפוגלי וקוריאוליס הפועלים על החלקיק כתלות במיקום ובמהירות?

ג. מהו כוח החיכוך הפועל על החלקיק?

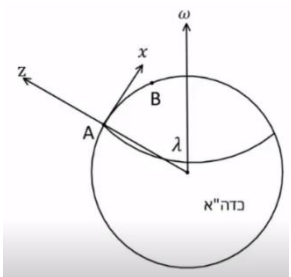
ד. רשמו משוואות התנועה עבור רכיב המיקום לאורך ציר ה- x במערכת מסתובבת.

8) עכביש מטפס על עץ



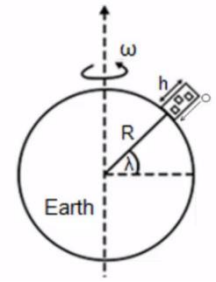
עץ דקל נמצא בקו רוחב λ וכיוונו מקביל לרדיוס כדה"א (הנח שגובהו זניח ביחס לרדיוס כדה"א).
עכביש מטפס במהירות קבועה במעלה חוט שטווה המחובר לעץ.
מצא את הזווית שיוצר החוט עם העץ.
הנח כי תאוצת הכובד g כבר כוללת את התיקון הצנטריפוגלי וכי הזווית עם העץ קטנה ולכן ניתן להזניח את רכיבי המהירות בצירים x , y (התייחס ל- ω_E , R_E , v בנתונים).

9) פגז עם כנפיים



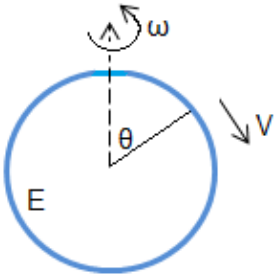
פגז עם כנפיים נורה במהירות $v=4\frac{Km}{sec}$.
בגלל הכנפיים, הפגז עף בגובה קבוע מעל פני כדה"א.
הפגז יוצא מנקודה A הנמצאת בזווית $\lambda=5°$ מציר הסיבוב של כדה"א ומגיע לנקודה B הנמצאת במרחק $d=5Km$ צפונית לנקודה A.
ניתן להניח כי $d<<R_E$ ומכאן שקו הרוחב של B זהה לזה של A.
חשב את הזווית בה צריך לירות את הפגז ביחס לקו האורך המחבר בין A ל-B כך שיגיע בדיוק לנקודה B.
רמז: מומלץ לשים לב לגדלים בשאלה ולעשות הזנחות בהתאם.

10) כדור משוחרר מגג בניין



כדור משוחרר ממנוחה מגג בניין בגובה h
הנמצא בקו רוחב λ.
חשב את הסטייה של הכדור הנובעת מכוח קוריאוליס.
הזנח את כל ההשפעות של הכוח הצנטריפוגלי.

11) הפרש גבהים בגדות נהר



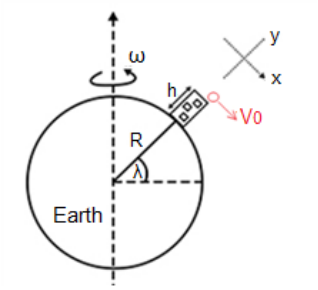
נהר זורם במהירות v מצפון לדרום.
מיקום הנהר הוא בזווית θ ביחס לציר הסיבוב של כדור הארץ.
נתון רדיוס כדור הארץ ורוחב הנהר D.
המהירות הזוויתית של כדור הארץ היא ω
מצאו את הפרש הגבהים בין גדות הנהר.

12) חבילת סיוע לכפר

כפר הנמצא בקו רוחב λ בחצי הכדור הצפוני נדרש לסיוע הומניטרי.
מטוס סיוע טס בגובה H מעל הכפר במהירות אופקית v_0 ובכיוון צפון.
המטוס משחרר חבילת סיוע לכפר.

א. חשבו את כוח קוריוליס, בצעו הזנחות מתאימות.
ב. האם הסטייה בנקודת הנפילה של החבילה היא מזרחה או מערבה?
ג. חשב את הסטייה מהכפר כתוצאה מכוח קוריוליס
(הניחו שאין סטייה צפונה או דרומה).

13) זריקה אופקית עם קוריאוליס ללא הזנחות



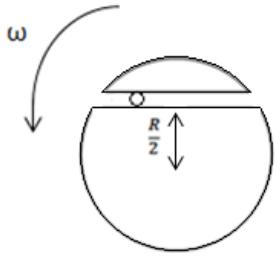
מסה m נזרקת אופקית ממגדל בגובה H.
המגדל נמצא בקו רוחב λ.
נתון:
R - רדיוס כדור הארץ.
v_0 - מהירות התחלתית של המסה.
g - תאוצת הכובד בקטבים.
ω - מהירות זוויתית של כדור הארץ.
הנח כי $h << R$ וכי ניתן להזניח את השינוי בכוח הצנטריפוגלי ואת השינוי בקו הרוחב במהלך התנועה.

א. חשב את משוואות התנועה במערכת יחוס של המגדל.

ב. פתור את משוואות התנועה.

ג. בדוק מה קורה בגבול ש- $g >> R\omega^2$ ו- $\omega t << 1$? פתח עד סדר שני ב- ωt.

14) דיסקה מסתובבת וגוף בתעלה שאינה במרכז



בדסקה ברדיוס R ישנה תעלה ישרה במרחק $\frac{R}{2}$ ממרכז הדסקה.
הדסקה מסתובבת במהירות זוויתית ω.
כוח מושך גוף בעל מסה m לאורך התעלה כך שמהירות הגוף היא: $v = \omega R$ יחסית לדסקה.

א. מה גודלו של הכוח המסיע את המסה אם נתון שאין חיכוך בין המסה לתעלה?

ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח הנורמלי הפועל מדפנות התעלה?
(התעלם מכוח הכובד).

ג. במידה והכוח המושך את המסה לא היה פועל, והגוף היה מתחיל לנוע מקצה התעלה במהירות התחלתית $v = \omega R$ כלפי פנים, מה היתה מהירות הגוף במרכז התעלה?

תשובות סופיות:

1) א. $v'=0$ ב. $tg\theta=\frac{v^2}{gR}$

2) א. $\vec{F}=m\omega^2r\hat{r}\,,\vec{F}=2m\dot{r}\omega\left(-\hat{\theta}\right)$

ב. $r(t)=a\,cosh(t)\,,v(t)=\dot{r}=\omega a\,sinh(t)$

ג. $t_{end}=\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-a^2}}{a}\right)$ ד. $-\mu 2m\omega\dot{r}+m\omega^2r=m\ddot{r}$

3) $z=\frac{\omega d^2}{v}\sin\lambda$

4) $\cos\alpha=\frac{mg-QE}{m\omega^2L}$

5) $\vec{f}=-m\left(\omega^2R+2\omega v+\frac{v^2}{R}\right)\hat{r}$

6) א. $\left|v_{ball,disk}\right|^2=\left(\frac{R}{T}\left(\cos\omega T+1\right)\right)^2+\left(\frac{R}{T}\sin\omega T+\omega R\right)^2\,,\tan\theta_{ball,disk}=\frac{\cos\omega T+1}{\sin\omega T+\omega T}$

ב. $\tilde{\omega}^2r=\ddot{r}\,,\,-2\tilde{\omega}\dot{r}=r\tilde{\omega}$

7) א. $F(r)=-\frac{GMm}{R^3}x\hat{x}$ ב. $\vec{F}=m2\omega\dot{x}\hat{z}$ ג. $N=-2m\omega\dot{x}\hat{z}$

ד. $-\frac{GM}{R^3}+\omega^2x-2\mu\omega\dot{x}=\ddot{x}$

8) $\cos\theta=\frac{g}{\sqrt{\omega_E^4R_E^2\cos^2(\lambda)\sin^2(\lambda)+4\omega_E^2v^2+g^2}}$

9) $\alpha=5.185\cdot10^{-3}$

10) $y=-\omega\cos(\lambda)g\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$

11) $\tan(\varphi)=\frac{2mv\omega\cos\theta}{-mg+m\omega^2R_E\sin^2\theta}$

12) א. $2m\left(gt\omega\cos\lambda+v_0\omega\sin\lambda\right)\hat{z}$ ב. מזרחה.

ג. $\frac{g}{3}\left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\omega\cos\lambda+v_0\omega\sin\lambda\frac{H}{g}$

13) ראה סרטון.

14) א. $F=-m\omega^2x$ ב. $N=\frac{3}{2}m\omega^2R$ ג. $v(x=0)=\frac{1}{2}\omega R$