מכניקה 90903

פרק 17 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

רקע:

כוח מרכזי:

כוח מהצורה:

$$\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$$

כלומר הוא תלוי רק ב r ובכיוון רדיאלי בלבד.

כוח מרכזי הוא כוח משמר (אנרגיה).
כוח מרכזי לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח תלויה רק ב r, ואם הראנו שהאנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב r אז זו הוכחה שהכוח מרכזי.

כוח הכובד:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

כאשר:

$$G = 6.67384.10^{-11}m^{-3}kg^{-1}s^{-2}$$

קרוב לכדה״א:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_Em}{{R_E}^2} \approx mg$$

באשר:

$$r \approx R_E \approx 6400km$$

$$M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24}kg$$

$$g = \frac{GM_E}{{R_E}^2}$$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

כאשר α קבוע כלשהו.

המסלול של גוף תחת השפעת כוח הכובד:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

E היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- L הוא התנ"ז.

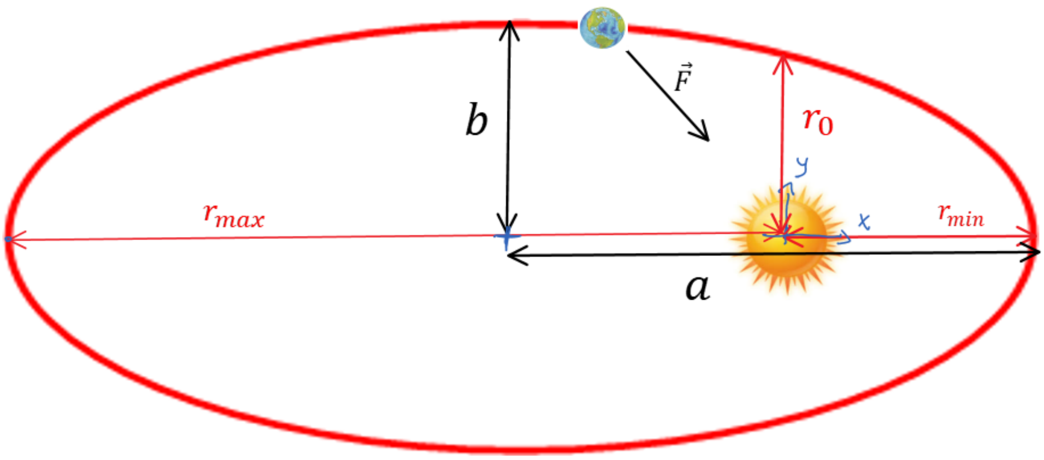
צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1 - מעגל $\varepsilon = 0$

במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$ ולקבל ש:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

מקרה 2 - אליפסה $0 < \varepsilon < 1$



מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה:

$$v(r_{min}) = v_{max} \qquad v(r_{max}) = v_{min}$$

ובד"כ נמצא את המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנ"ז:

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1+\varepsilon}$$

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1-\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{\min}}{r_{max} + r_{\min}}$$

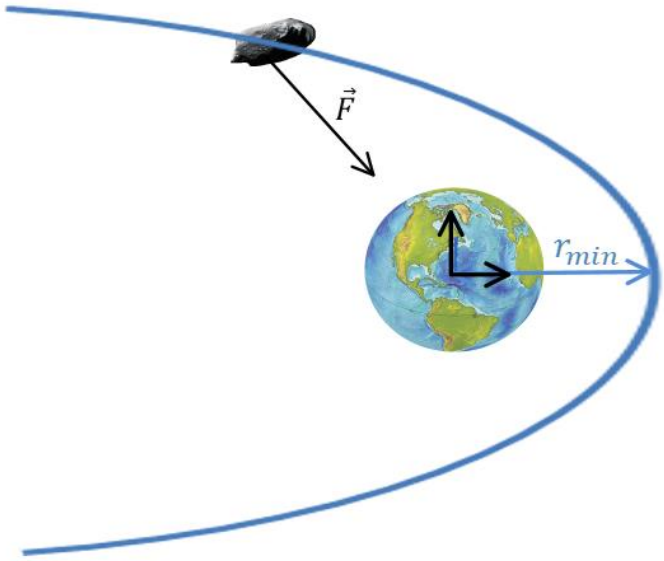
$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}$$

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

שטח האליפסה:

$$S = \pi ab$$

מקרה 3 - היפרבולה $\varepsilon \geq 1$ (פרבולה כאשר $\varepsilon = 1$)



$$v(r_{min}) = v_{max}$$

מהירות מילוט:

המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

שאלות:

1) טיל יוצא מכדה״א וחוזר

טיל נורה מכדור הארץ.
הטיל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה.
נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטיל מכדה״א הוא R_1.

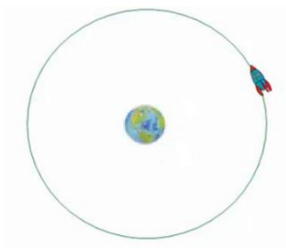
נתונה הזווית בין R_1 למהירות באותו הרגע v_1 היא 30 מעלות.

רדיוס כדה״א הוא R_E וזווית הפגיעה של הטיל בכדה״א היא θ.

א. מצא את: v_2 , v_1 , v_0 , θ_0. (v_2 מהירות פגיעת הטיל בכדה״א).

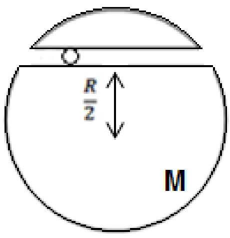
ב. חשב את: R_{max} (המרחק המקסימלי של הטיל מכדה״א) ו- v_{min} (המהירות באותה נקודה).

2) חלק עף במהירות מילוט



חללית בעלת מסה m סובבת את כדה״א במסלול מעגלי ברדיוס R. ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים. אחד החלקים בעל מסה של שליש m עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט.
מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.

3) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז



גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק $\frac{R}{2}$ ממרכז כדור בעל מסה M.
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון.

2) ראה סרטון.

3) $x(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t\right)$

חוקי קפלר:

רקע:

החוק הראשון של קפלר:

צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.

החוק השני של קפלר - חוק השטחים השווים:

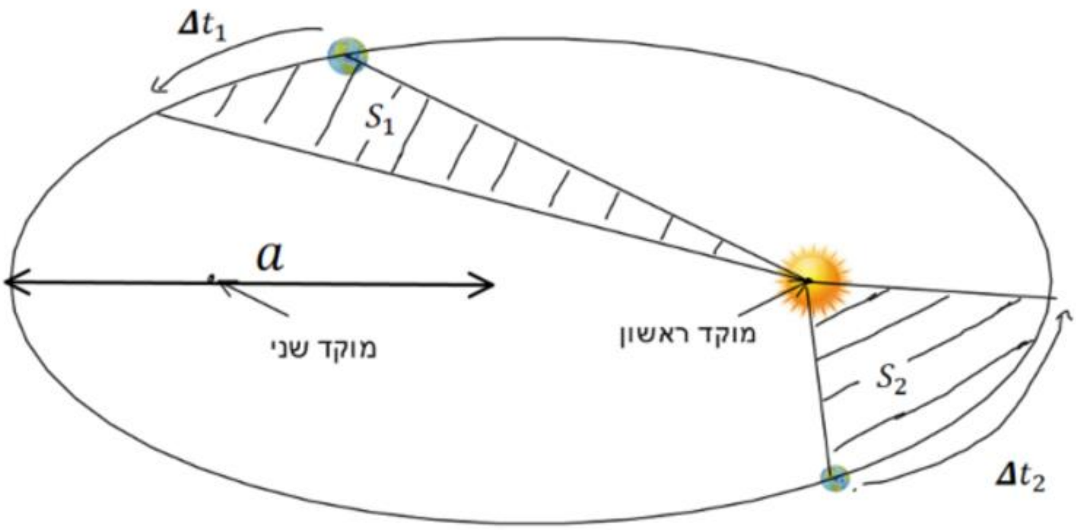
הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים.

מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$$\frac{S_1}{\Delta t_1}=\frac{S_2}{\Delta t_2}=\frac{S_T}{\mathrm{T}}$$

S_T - שטח כל האליפסה

T - זמן המחזור



החוק השלישי של קפלר- החוק ההרמוני:

ריבוע זמן המחזור של כוכב לכת פרופורציוני לחזקה השלישית של מחצית הציר הראשי של האליפסה (semimajor axis).

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=\frac{a^3}{GM}$$

a - מחצית הציר הראשי של האליפסה

M - מסת הכוכב שבמוקד

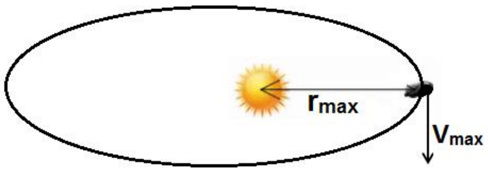
במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים הנוסחה היא:

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=\frac{a^3}{G(m1+m2)}$$

שאלות:

1) **מציאת זמן מחזור**

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים.
נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף.
מצא את זמן המחזור של הגוף.

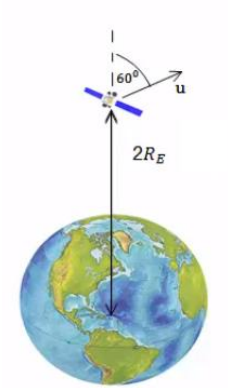


תשובות סופיות:

1) $T=\left(\frac{r_{min}V_{max}}{2S}\right)^{-1}$

תרגילים נוספים:

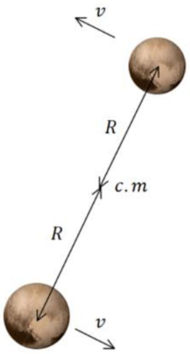
שאלות:



1) לווין נכנס למסלול אליפטי

לווין נורה אנכית מפני כדה"א.
הלווין מגיע לשיא גובה של $2R_E$.
ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון 60 מעלות עם האנך לכדור הארץ שגודלה u.
(התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).

א. מצא תנאי על המהירות u כך שהלווין ישאר במסלול סגור.
ב. מצא תנאי נוסף על u כך שהלווין לא יפגע בכדור הארץ.



2) כוכב כפול

תצפית על כוכב כפול מסויים מראה כי לשני הכוכבים מהירות כמעט זהה ושווה ל 180 ק"מ לשניה.
זמן המחזור של הסיבוב הוא 17 ימים.
מכיוון שהמהירות כמעט זהה ניתן להסיק שהמרחק ממרכז המסה כמעט זהה ומכאן שהמסות כמעט זהות.
חשבו את המרחק ממרכז המסה ואת המסה של כל כוכב.

3) יקום דו מימדי

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה $(x_0\ ,\ y_0)$

וגודלו : $\dfrac{k}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$. כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.
חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה M אשר נעה בין הנקודה $(x_1\ ,\ y_1)$
לבין הנקודה $(x_2\ ,\ y_2)$.

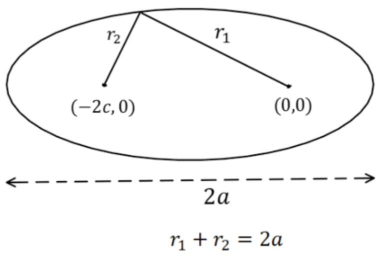
ב. מסה M נמצאת במיקום $(Bx_0\ ,\ By_0)$ ויש לה מהירות : $\vec{v}=A(\hat{x}+\hat{y})$.
מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה d?
(A , B, d גדולים מאפס).

ג. מסה M נמצאת במרחק r_1 ממרכז הכוח.
למסה מהירות v_1 וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.
מצא קשר בין v_1 לבין r_1.

ד. פצצה בעלת מסה M מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות
שלה הוא v_2 והמרחק שלה הוא r_2, כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום
שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד
בגודל m והשני בגודל $M-m$.
החלק $M-m$ ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.
מה צריכה להיות מהירות החלק m על מנת שהחלק $M-m$ יהיה במרחק
קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?

4) פיתוח משוואת האליפסה

באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני
המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל- $2a$
(רוחב האליפסה).
נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים
בנקודות $(0,0)$ ו-$(-2c,0)$.



הראו כי משוואת האליפסה היא: $r(\theta)=\dfrac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$ כאשר $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$

ו- $r_0=\dfrac{(a^2-c^2)}{a}$.

תשובות סופיות:

1) א. $|u|<\sqrt{\frac{GM}{R_E}}$ ב. $\sqrt{\frac{GM}{2R_E}}<|u|<\sqrt{\frac{GM}{R_E}}$

2) $R=4.2\cdot 10^{10}m,\quad M=8\cdot 10^{31}\mathrm{kg}$

3) א. משמר, $U(r')=-2kr'^{-\frac{1}{2}}$ כאשר $r'=\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$W=2k\left[\left((x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}}-\left((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}}\right]$$

ב. $v=\left(2A^2-\frac{4k}{m}\left[d^{-\frac{1}{2}}-(B-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x_0^{\,2}+y_0^{\,2}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}$ ג. $v_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,r_1^{-\frac{1}{4}}$

ד. אחורה $u_2=\frac{1}{m}(M-m)\sqrt{\frac{k}{m}}r_1^{-\frac{1}{4}}-\frac{M}{m}v_1$

4) הוכחה.