

# מכניקה קלאסית

פרק 20 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד ..... 1
2. חוקי קפלר ..... 9
3. בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת ..... (ללא ספר) 9
4. תרגילים נוספים ..... 11

## תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

רקע:

כוח מרכזי:

כוח מהצורה:

$$\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$$

כלומר הוא תלוי רק ב  $r$  ובכיוון רדיאלי בלבד.

כוח מרכזי הוא כוח משמר (אנרגיה).

כוח מרכזי לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח תלויה רק ב  $r$ , ואם הראנו שהאנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב  $r$  אז זו הוכחה שהכוח מרכזי.

כוח הכובד:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

כאשר:

$$G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$$

קרוב לכדה"א:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E m}{R_E^2} \approx mg$$

באשר:

$$r \approx R_E \approx 6400 km$$

$$M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$$

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

כאשר  $\alpha$  קבוע כלשהו.

המסלול של גוף תחת השפעת כוח הכובד:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

$E$  היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- $L$  הוא התנ"ז.

צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1 - מעגל  $\varepsilon = 0$

במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$  ולקבל ש:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

מקרה 2 - אליפסה  $0 < \varepsilon < 1$ 

מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה:

$$v(r_{min}) = v_{max} \quad v(r_{max}) = v_{min}$$

ובד"כ נמצא את המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנ"ז:

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

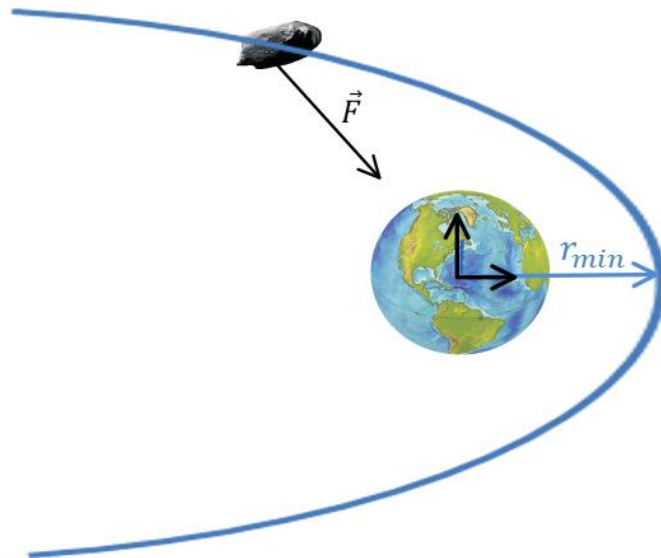
$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}$$

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

שטח האליפסה:

$$S = \pi ab$$

מקרה 3 - היפרבולה  $\varepsilon \geq 1$  (פרבולה כאשר  $\varepsilon = 1$ )



$$v(r_{min}) = v_{max}$$

**מהירות מילוט:**

המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

**אנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית:**

בבעיות שבהן האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב  $r$ . ניתן לרשום את האנרגיה הכוללת של הגוף כתלות במשתנה  $r$  בלבד.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

כאשר:

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

עבור:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$



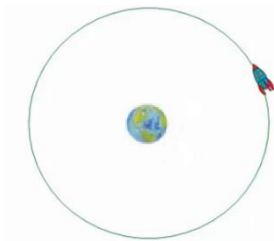
**שאלות:**



**(1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר**

טייל נורה מכדור הארץ. הטייל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה. נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטייל מכדה"א הוא  $R_1$ .

- נתונה הזווית בין  $R_1$  למהירות באותו הרגע  $v_1$  היא 30 מעלות. רדיוס כדה"א הוא  $R_E$  וזווית הפגיעה של הטייל בכדה"א היא  $\theta$ .
- א. מצא את:  $v_0, v_1, v_2, \theta_0$ . (מהירות פגיעת הטייל בכדה"א).
- ב. חשב את:  $R_{max}$  (המרחק המקסימלי של הטייל מכדה"א).
- ו-  $v_{min}$  (המהירות באותה נקודה).



**(2) חלק עף במהירות מילוט**

חללית בעלת מסה  $m$  סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס  $R$ . ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים. אחד החלקים בעל מסה של  $m$  שליש עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט. מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.

**(3) פוטנציאל אפקטיבי**

גוף בעל מסה  $m$  נע בתנועה מעגלית תחת השפעת הפוטנציאל:  $U(r) = -\frac{A}{\sqrt{r}}$ . כאשר  $A$  קבוע נתון. נתון גם התנע הזוויתי של הגוף  $L$ .

א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. מצא את מהירות הגוף.

**(4) זמן מחזור**

גוף בעל מסה  $m$  נע בקו ישר (מימד אחד) תחת הפוטנציאל:  $U(x) = B|x|$ . נתון כי המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף הוא  $A$ .

א. מצא את ערך האנרגיה הכללית של הגוף.

ב. מצא את זמן המחזור.



**5) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז**

גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק  $\frac{R}{2}$  ממרכז כדור בעל מסה  $M$ .  
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.  
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.



**6) מדידת מסה של חור שחור**

חור שחור הינו גוף שמימי כבד מאוד.

כדי למדוד את המסה  $M$  של חור שחור הנמצא במרחק גדול מאוד  $R$  מאתנו ובמנוחה ביחס אלינו, יורים לעברו טיל בעל מסה  $m$  הקטנה מאוד ביחס למסת החור.

המהירות ההתחלתית של הטיל היא  $v_0$  והיא מוסטת בזווית  $\delta$  קטנה מאוד לכיוון המדויק אל החור.

מכשור שנמצא על הטיל יכול להורות לנו מה הזווית  $\phi$  אליו הוסט הטיל לאחר זמן רב ביחס לזווית ממנה התחיל. ניתן להניח כי האנרגיה הפוטנציאלית במרחק  $R$  זניחה.

א. מהי האקסצנטריות של מסלול הטיל סביב החור השחור? מהו סוג המסלול? (מעגל, אליפסה או היפרבולה).

ב. מהי הזווית של מהירות הטיל לאחר שהתרחק מאוד מהחור ביחס לציר ה- $x$ ?

ג. מצא קשר בין הזווית של סעיף ב' ל- $\phi$  ובטא את מסת החור באמצעות:

$m, R, v_0, \delta, \phi$ .

## תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

(2) ראה סרטון.

$$r_0 = \left( \frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ א. (3)}$$

$$v = \frac{L}{m \left( \frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}}} \text{ ב.}$$

$$T = 8A \sqrt{\frac{2B}{m}} \text{ ב.}$$

$$E(x_{\max}) = 0 + B \cdot A \text{ א. (4)}$$

$$x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \left( \sqrt{\frac{GM}{R^3}} t \right) \text{ (5)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{v_0^2 R \sin \delta}{GM} \right)^2}, \text{ א. היפרבולה, (6)}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\varepsilon} \text{ ב.}$$

$$M = \frac{1}{G} v_0^2 R \sin \delta \tan \frac{\varphi}{2} \text{ ג.}$$

## חוקי קפלר:

רקע:

החוק הראשון של קפלר:

צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.

החוק השני של קפלר - חוק השטחים השווים:

הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים.

מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$$

$S_T$  - שטח כל האליפסה

$T$  - זמן המחזור



### החוק השלישי של קפלר - החוק ההרמוני:

ריבוע זמן המחזור של כוכב לכת פרופורציוני לחזקה השלישית של מחצית הציר הראשי של האליפסה (semimajor axis).

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM}$$

$a$  - מחצית הציר הראשי של האליפסה

$M$  - מסת הכוכב שבמוקד

במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים הנוסחה היא:

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

### שאלות:

#### (1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.



### תשובות סופיות:

$$T = \left(\frac{r_{\min} v_{\max}}{2S}\right)^{-1} \quad (1)$$

## תרגילים נוספים:

### שאלות:



- (1) **לווין נכנס למסלול אליפטי**  
 לווין נורה אנכית מפני כדה"א.  
 הלווין מגיע לשיא גובה של  $2R_E$ .  
 ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון  $60^\circ$  מעלות עם האנך לכדור הארץ שגודלה  $u$ .  
 (התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).  
 א. מצא תנאי על המהירות  $u$  כך שהלווין ישאר במסלול סגור.  
 ב. מצא תנאי נוסף על  $u$  כך שהלווין לא יפגע בכדור הארץ.



- (2) **כוכב כפול**  
 תצפית על כוכב כפול מסויים מראה כי לשני הכוכבים מהירות כמעט זהה ושווה ל  $180 \text{ ק"מ לשניה}$ .  
 זמן המחזור של הסיבוב הוא  $17 \text{ ימים}$ .  
 מכיוון שהמהירות כמעט זהה ניתן להסיק שהמרחק ממרכז המסה כמעט זהה ומכאן שהמסות כמעט זהות.  
 חשבו את המרחק ממרכז המסה ואת המסה של כל כוכב.

**3) יקום דו מימדי**

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה  $(x_0, y_0)$

וגודלו:  $\frac{k}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$ . כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.

חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה  $M$  אשר נעה בין הנקודה  $(x_1, y_1)$

לבין הנקודה  $(x_2, y_2)$ .

ב. מסה  $M$  נמצאת במיקום  $(Bx_0, By_0)$  ויש לה מהירות:  $\vec{v} = A(\hat{x} + \hat{y})$ .

מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה  $d$ ?

( $A, B, d$  גדולים מאפס).

ג. מסה  $M$  נמצאת במרחק  $r_1$  ממרכז הכוח.

למסה מהירות  $v_1$  וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.

מצא קשר בין  $v_1$  לבין  $r_1$ .

ד. פצצה בעלת מסה  $M$  מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות

שלה הוא  $v_2$  והמרחק שלה הוא  $r_2$ , כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום

שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד

בגודל  $m$  והשני בגודל  $M - m$ .

החלק  $M - m$  ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.

מה צריכה להיות מהירות החלק  $m$  על מנת שהחלק  $M - m$  יהיה במרחק

קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?

**4) פיתוח משוואת האליפסה**

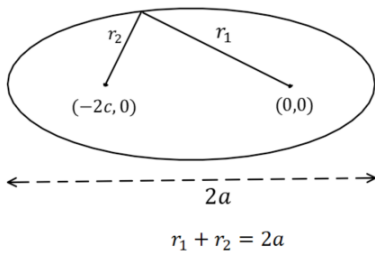
באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני

המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל-  $2a$

(רוחב האליפסה).

נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים

בנקודות  $(0,0)$  ו-  $(-2c,0)$ .



הראו כי משוואת האליפסה היא:  $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta}$  כאשר  $\epsilon = \frac{c}{a}$

$$r_0 = \frac{(a^2 - c^2)}{a}$$

## תשובות סופיות:

$$|u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad \sqrt{\frac{GM}{2R_E}} < |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad (1)$$

$$R = 4.2 \cdot 10^{10} m, \quad M = 8 \cdot 10^{31} kg \quad (2)$$

$$\text{א. משמר, } U(r') = -2kr'^{-\frac{1}{2}}, \text{ כאשר } r' = \left( (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$W = 2k \left[ \left( (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 \right)^{-\frac{1}{4}} - \left( (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\text{ג.} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ב.} \quad v = \left( 2A^2 - \frac{4k}{m} \left[ d^{\frac{1}{2}} - (B-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ד. אחורה } u_2 = \frac{1}{m}(M-m) \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} - \frac{M}{m} v_1$$

(4) הוכחה.