

# פיזיקה 1 למהנדסים (114077)

פרק 19 - כבידה וכוח מרכזי -

תוכן העניינים

1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד..... 1
2. חוקי קפלר..... 6

## תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

רקע:

כוח מרכזי:

כוח מהצורה:

$$\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$$

כלומר הוא תלוי רק ב  $r$  ובכיוון רדיאלי בלבד.

כוח מרכזי הוא כוח משמר (אנרגיה).

כוח מרכזי לא מפעיל מומנט כוח ולכן הוא משמר גם תנע זוויתי.

האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח תלויה רק ב  $r$ , ואם הראנו שהאנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק ב  $r$  אז זו הוכחה שהכוח מרכזי.

כוח הכובד:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

כאשר:

$$G = 6.67384 \cdot 10^{-11} m^{-3} kg^{-1} s^{-2}$$

קרוב לכדה"א:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{GM_E m}{R_E^2} \approx mg$$

באשר:

$$r \approx R_E \approx 6400 km$$

$$M_E \approx 5.97 \cdot 10^{24} kg$$

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

הצורה הזו של האנרגיה היא צורה כללית שיש לכוחות נוספים והרבה פעמים רושמים אותה כ:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

כאשר  $\alpha$  קבוע כלשהו.

המסלול של גוף תחת השפעת כוח הכובד:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

$E$  היא האנרגיה הכוללת של הגוף ו- $L$  הוא התנ"ז.

צורת המסלול מתחלקת ל-3 מקרים:

מקרה 1 - מעגל  $\varepsilon = 0$

במקרה הזה ניתן להשוות את הכוח ל- $\frac{mv^2}{r}$  ולקבל ש:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

מקרה 2 - אליפסה  $0 < \varepsilon < 1$ 

מקור הכוח נמצא באחד ממוקדי האליפסה:

$$v(r_{min}) = v_{max} \quad v(r_{max}) = v_{min}$$

ובד"כ נמצא את המהירויות באמצעות שימור אנרגיה ותנ"ז:

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

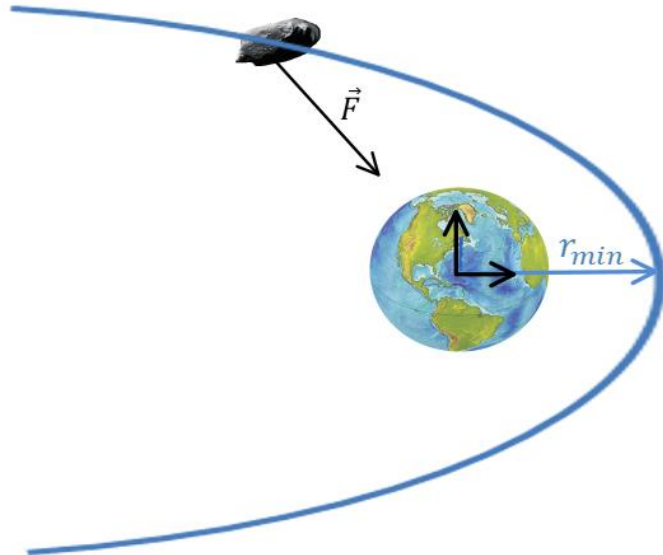
$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}$$

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

שטח האליפסה:

$$S = \pi ab$$

מקרה 3 - היפרבולה  $\varepsilon \geq 1$  (פרבולה כאשר  $\varepsilon = 1$ )



$$v(r_{min}) = v_{max}$$

**מהירות מילוט:**

המהירות הדרושה להגיע לאינסוף.

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

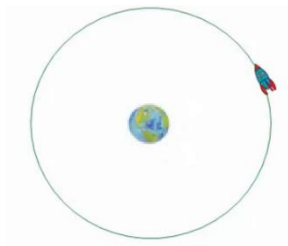
**שאלות:**



**(1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר**

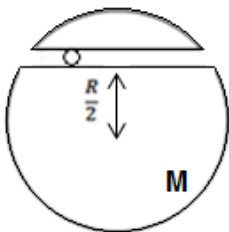
טייל נורה מכדור הארץ. הטייל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה. נתון שבאייזושהי נקודה במסלול המרחק של הטייל מכדה"א הוא  $R_1$ .

- נתונה הזווית בין  $R_1$  למהירות באותו הרגע  $v_1$  היא 30 מעלות. רדיוס כדה"א הוא  $R_E$  וזווית הפגיעה של הטייל בכדה"א היא  $\theta$ .
- א. מצא את:  $v_0, v_1, v_2, \theta_0$ . (מהירות פגיעת הטייל בכדה"א).  
 ב. חשב את:  $R_{max}$  (המרחק המקסימלי של הטייל מכדה"א).  
 ג.  $v_{min}$  (המהירות באותה נקודה).



**(2) חלק עף במהירות מילוט**

חללית בעלת מסה  $m$  סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס  $R$ . ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים. אחד החלקים בעל מסה של שלישי  $m$  עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט. מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.



**(3) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז**

גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק  $\frac{R}{2}$  ממרכז כדור בעל מסה  $M$ . הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך. מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

**תשובות סופיות:**

- (1) ראה סרטון.  
 (2) ראה סרטון.

$$x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t\right) \quad (3)$$

## חוקי קפלר:

רקע:

החוק הראשון של קפלר:

צורת המסלול של כל כוכב לכת סביב השמש היא אליפסה, שהשמש נמצאת באחד ממוקדיה.

החוק השני של קפלר - חוק השטחים השווים:

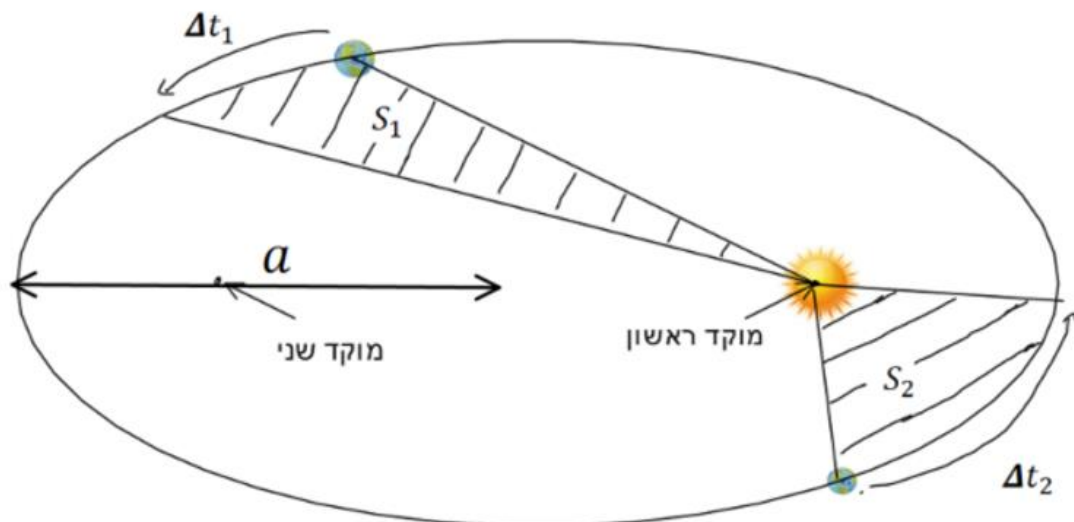
הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש (רדיוס המקום) מכסה שטחים שווים במרחקים שווים.

מעבר לכך ניתן להגיד שגם אם הזמנים לא שווים היחס של השטח חלקי הזמן קבוע.

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_T}{T}$$

$S_T$  - שטח כל האליפסה

$T$  - זמן המחזור



### החוק השלישי של קפלר - החוק ההרמוני:

ריבוע זמן המחזור של כוכב לכת פרופורציוני לחזקה השלישית של מחצית הציר הראשי של האליפסה (semimajor axis).

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM}$$

$a$  - מחצית הציר הראשי של האליפסה

$M$  - מסת הכוכב שבמוקד

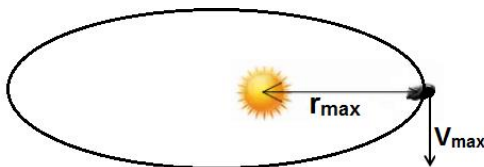
במקרה של מערכת בינארית שבה שני הכוכבים זזים הנוסחה היא:

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

### שאלות:

#### (1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.



### תשובות סופיות:

$$T = \left(\frac{r_{\min} v_{\max}}{2S}\right)^{-1} \quad (1)$$