משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 11 - יישומים של טורי פורייה

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 1
2. משוואת החום 3
3. משוואת הגלים 5

בעיות שטורם ליוביל:

שאלות:

1) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 & , \quad 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0 & , \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

תרגילים מסכמים:

1) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & , \quad 0<x<L \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}$.

2) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & , \quad 0<x<L \\ y'(0)=y'(L)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

2) $y=0$

3) $y=0$

4) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}x\right)$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}\right)^2$.

5) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

6) פונקציות עצמיות של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x$.

ערכים עצמיים של הבעיה: $n=1,2,3,\ldots$, $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2$.

תרגילים מסכמים-תשובות סופיות:

1) $y_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ n=1,2,3,...

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$

2) $y_n(x)=\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ $n=0,1,2,3,\ldots$

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$

משוואת החום:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin(x) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}.$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}+3\sin^2(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}.$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 16u & 0<x<3\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0 \end{cases}.$$

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=6+4\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}.$$

5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}.$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)$

2) $u(x,t)=2-\frac{3}{2}e^{-4t}\cos(2x)$

3) $u(x,t)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{4\pi(2k-1)}{3}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

4) $u(x,t)=6+4e^{-\frac{81\pi^2}{4}t}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

5) $u(x,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}x\right)$

משוואת הגלים:

שאלות:

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-7\sin(5\pi x) \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=-2x-1 \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

1) $u(x,t)=\frac{1}{2}\cos(\pi t)\sin(n\pi x)-7\cos(5\pi t)\sin(5\pi x)$

2) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)}\cos(\pi(2k-1)t)\sin(\pi(2k-1)x)$

3) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{3(-1)^n-1}{\pi n}\cos(2\pi nt)\sin(\pi nx)$