מתמטיקה לפכ"מ

פרק 2 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים – מושגי יסוד

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b > a+3$, כאשר:
א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
ב. $A=\{3,5,19,103\}$
ג. $A=\{5,6,7\}$

2) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:
א. $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2<5\}$
ב. $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2>5\}$
ג. $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x<y+2\}$
ד. $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x\cdot y>8\}$

3) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר A, כך ש-R יחס מעל A.
א. $R=\{2,5,(7,8)\}$
ב. $R=\{(1,3),(3,7),(2,5)\}$
ג. $R=\{((1,2),(3,4)),((1,3),(2,4))\}$

4) עבור הקבוצות משאלה **1**, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את $\mathrm{dom}(R)$ ואת $\mathrm{range}(R)$, ורשמו את היחס במטריצה.

5) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A\{1,2,3,4,5\}$, כך: $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow |y-x|>2$.
א. רשמו את R במפורש בעזרת $\langle\ldots\rangle$ ובעזרת דיגרף.
ב. חשבו את היחס R^{-1} ואת כל החזקות השונות של R.
ג. מצאו אם היחס R מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:
$R\cap R^{-1}\subseteq I_A,\ \ R=R^{-1},\ \ I_A\subseteq R,\ \ R^2\subseteq R$

6) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. ה- Domain של $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ הוא $\{1,2\}$.
ב. ה- Range של $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ הוא $\{2,3,1\}$.
ג. ה- Domain של היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ שווה ל- Range של R^{-1}.

7) תהי $A\{1,2,5\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. אם R הוא יחס הזהות $(R=I_A)$, אז $R=\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$.
ב. אם R הוא היחס המלא, אז
$R=\{(1,1),(1,2),(1,5)(2,1),(2,2),(2,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$.
ג. אם R הוא יחס הזהות, אז $R=\left(\left(IR\right)^{-1}\right)^{-1}$.

8) תהיינה $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{5,6\}$, יהי R יחס כך ש- $R\subseteq A\times B$,
ויהי S יחס כך ש- $S\subseteq B\times C$.
איזו טענה נכונה:
א. $SR=\varnothing$
ב. אם R ו- S יחסים מלאים, אז ב- RS יש ארבעה איברים.
ג. אם R הוא היחס הריק ו- S הוא היחס המלא, אז $RS=S$.
ד. ה- Domain שווה ל- Range של $S^{-1}R^{-1}$.

9) תהי $A=\{1,2,5\}$ ויהי $R=\{(1,1),(1,2),(2,5),(5,5)\}$ יחס מעל A.
א. הביעו את R בצורה של גרף.
ב. הביעו את R^{-1} בצורה של גרף.
ג. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של גרף.
ד. הביעו את היחס המלא מעל A בצורה של גרף.
ה. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של מטריצת סמיכויות.
ו. הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.
ז. הביעו את RR^{-1} בצורה של גרף.
ח. הביעו את $R\cup R^{-1}$ בצורה של גרף.
הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.
ט. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\cap\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של מטריצת סמיכויות.
י. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\setminus\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.
יא. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\Delta\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.

יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ נגדיר יחס T באופן הבא: $\langle x,y\rangle\in T \Leftrightarrow x\cdot y\le 23$
רשום מדגם בן שלושה זוגות של איברים ביחס ובדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי.

2) נתון היחס T הבא מעל $A=\{1,2,3,4\}$

$$T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

האם T רפלקסיבי? אם לא אז רפלקסיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T סימטרי? אם לא אז סימטרי הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T טרנזיטיבי? אם לא טרנזיטיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי ש- T יהיה גם רפלקסיבי, גם סימטרי, וגם טרנזיטיבי.

3) נגדיר יחס T מעל $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $T=\{|\langle a,b\rangle| a\cdot b\in\mathbb{Z}_{even}\}$

א. רשום שלוש זוגות ביחס ושלושה זוגות שאינם ביחס.
ב. בדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

4) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: (יש ל- x,y אותה הזוגיות)
$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in S$ (כלומר שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים)
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

5) נתון יחס R מעל קבוצה A.
הוכיחו כי $R^2\subseteq R$ אם״ם R טרנזיטיבי.

6) נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $\langle x,y\rangle\in S\Leftrightarrow 3|x-y$
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

7) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,

$$R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\} \qquad R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_2 , R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

8) עבור $A\{1,2,3,4,5,6\}$, נגדיר S מעל A כך:

$$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 6,3\rangle\}$$

א. בדקו אם S רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.
ב. רשמו את היחסים I_A ו-S^{-1}.
ג. רשמו את כל החזקות השונות של S.
ד. רשמו את היחס $R=\{1,3,6\}^2 \cup \{2,4\}^2 \cup \{5\}^2$, כקבוצה של זוגות.
ה. היחס R הוא יחס שקילות.
רשמו את מחלקות השקילות השונות ואת קבוצת המנה.

9) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.

א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $x^2+y\ge 1 \Leftrightarrow (x,y)\in T$.

10) תהי $\mathbb{N}_+$ הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ונגדיר עליה יחס R כך: $aRb \Leftrightarrow [a=b^b \vee b=a^a]$.

א. האם $1R1$? האם R רפלקסיבי?
ב. האם R סימטרי?
ג. האם R אנטי-סימטרי?
ד. האם R טרנזיטיבי?

11) נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, על ידי $\langle f,g\rangle\in R$ אם ורק אם קיימת $A\subseteq\mathbb{N}$ אינסופית, כך ש-$f(n)=g(n)$ לכל $n\in A$.

א. האם R רפלקסיבי?

ב. האם R אנטי-סימטרי?

ג. האם R טרנזיטיבי?

12) בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{R}$, כך: $aTb \iff a<b+1$.

ב. נגדיר יחס P מעל $P(\mathbb{N})$, כך: $APB \iff (A=B\vee A\cup\{1,2\}=b)$.

13) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

א. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$

ב. $xsy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$

ג. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ (x=my\vee y=mx)$

14) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ הוא יחס הזהות מעל A.

ב. $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ הוא היחס המלא מעל A.

ג. אם R הוא היחס המלא מעל A, אז R^{-1} הוא היחס המלא מעל A.

ד. אם R הוא יחס הזהות מעל A, אז R^{-1} הוא יחס הזהות מעל A.

ה. יהי R יחס מעל $A=\{1,2\}$.

האם יתכן כי R אינו טרנזיטיבי? נמקו.

15) יהי R יחס מעל A. הוכיחו:

א. אם $R\subseteq I_A$, אז R רפלקסיבי.

ב. אם $R=R^{-1}$, אז R סימטרי.

ג. אם $R^2\subseteq R$, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$, אז R אנטי-סימטרי.

16) תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי $R=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ יחס מעל A.

א. רשמו את הסגור הרפלקסיבי של R.

ב. רשמו את הסגור הסימטרי של R.

ג. רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של R.

17) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.

ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.

ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

18) יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל A, כך ש- $\forall a\in A\exists b\in A \quad aRb$.
הוכיחו כי R רפלקסיבי.

19) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B,C\subseteq A$, כך ש- $R=B\times C$.

20) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A, ונניח שקיים $y\in A$, עבורו $\forall x\in A (x,y)\in S$.
הוכיחו כי לכל $z\in A$ מתקיים $(y,z)\notin S$.

21) נתון כי R יחס על A וכן $R\cap I_A=\varnothing$ (אנטי-רפלקסיבי),
וכן $a,b\in A$, לא בהכרח שונים זה מזה, המקיימים $(a,b)\in R^2$ וגם $(b,a)\in R^2$.
הוכיחו שקיימים $c,d\in A$ (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- a ואינו שווה ל- b, המקיימים $(c,d)\in R^2$ וגם $(d,c)\in R^2$.

יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5\}$ נגדיר יחס S על A כך: $xSy \;\Leftrightarrow\; x\cdot y\geq 2$.

א. האם $S^2\setminus S=\varnothing$?

ב. האם S יחס שקילות על A?

2) עבור $A\{1,2,3\}$ נגדיר יחסים R,S מעל A כך:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\},\qquad S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

א. חשבו את היחסים RS ו- SR, ובדקו האם הם יחסי שקילות.

ב. האם היחסים S ו- S^2 אנטי-סימטריים? נמקו.

3) תהי S קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי E מעל S באופן הבא:
$AEB \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge B\subseteq A)$.
הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

4) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
$aEb \Leftrightarrow ab\geq -1$.
הוכיחו כי E יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

5) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2) \Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב-A.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות $[(2,1)]_R$, $[(1,2)]_R$, $[(1,1)]_R$.

6) נתון היחס R מעל $\mathbb{N}$.
$xRy \leftrightarrow (6\,|\,x-y)\vee(3\nmid x\cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)
מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

7) נגדיר יחס שקילות S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x=y=0) \vee (xy>0)$
ונגדיר יחס שקילות T מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2-9)S(y^2-9)$.
(אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)
כתבו במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$, ונמקו בקצרה.

8) יהי R יחס שקילות על A.
נאמר כי R אוקלידי, אם עבור כל $a,b,c \in A$ מתקיים התנאי:
$[(a,b)\in R \wedge (a,c)\in R] \Rightarrow (b,c)\in R$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם R יחס שקילות, אז הוא אוקלידי.
ב. אם R רפלקסיבי ואוקלידי, אז הוא יחס שקילות.

9) נתון כי R יחס שקילות על A, וכן $A \in P(B)\setminus\{B\}$.
האם מהנתון נובע כי R יחס שקילות על B, או שאינו יחס שקילות על B?

10) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):
א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.
ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.
ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.
ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.
ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.
ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.
ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.
ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.
ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.
י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

11) רשמו במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S=\{a,b,c,d\}$
המקיימים $\left|S/E\right|=2$ וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה.
הערה: יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S\times S$.

12) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ באופן הבא:
$ASB \Leftrightarrow \min A = \min B$, כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב-A.
א. הוכיחו כי S הינו יחס שקילות.
ב. נסמן ב-K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S.
בנו פונקציה $F: K \to \mathbb{N}$ חח״ע ועל.

13) יהיו R,S יחסי שקילות מעל A.
הוכיחו כי $R \triangle S$ לא יחס שקילות מעל A.

14) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים, אם מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to cRa$
לכל $a,b,c \in A$.
א. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.
ב. הוכיחו כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק,
אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

15) יחס השקילות S על $P(N)$ מוגדר כך: $S\{\langle A,B\rangle \mid A\cap\{1,2,3\} = B\cap\{1,2,3\}\}$.
א. מהי העוצמה של מחלקת השקילות $[\{4,7,9\}]_S$?
ב. כמה מחלקות שקילות יש?

יחסי סדר

שאלות

1) הוכיחו כי היחס R, המוגדר מעל הקבוצה $A=\{2^k | k\in\mathbb{N}\}$, על ידי $aRb \Leftrightarrow a|b$, הוא יחס סדר מלא.

2) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2=\{(a,b) | a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$,
באופן הבא: $(a_1,b_1)D(a_2,b_2)\Leftrightarrow(a_1\ge a_2)\wedge(a_1+b_1\ge a_2+b_2)$.
הוכיחו כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

3) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:
$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(a\le c\wedge b\le d)$.
א. הוכיחו כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.
ב. מצאו תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, שעליה היחס R הוא מלא.

4) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy\Leftrightarrow\neg((\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor\rightarrow y<x))$
(אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר).
כתבו במפורש את כל האיברים המינימליים של S.
תזכורת: $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R, אם $\forall y\in A((y\ne x)\rightarrow\neg(yRx))$.

5) יהי R יחס סדר חלש מעל A, ויהי S יחס סדר חלש מעל B.
הוכיחו כי אם $A\cap B=\varnothing$, אז $R\cup S$ יחס סדר חלש מעל $A\cup B$.

6) תהי A קבוצה לא-ריקה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A (סדורה) חלקית ביחס להכלה).
א. הראו שיש ב-K איבר קטן ביותר וגדול ביותר, והוכיחו שהם שייכים ל-K ואכן מקיימים את הנדרש.
ב. תהי $A=\{1,2,3,4\}$.
נסלק מ-K את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר שנמצאו בסעיף א, ונסמן את הקבוצה החדשה שהתקבלה ב-L (שאף היא (סדורה חלקית ביחס להכלה).
תנו דוגמה לשני איברים מינימליים ב-L והוכיחו שהם מינימליים, ותנו דוגמה לשני איברים מקסימליים ב-L והוכיחו שהם מקסימליים.
ג. הוכיחו שאין ב-L איבר קטן ביותר וגדול ביותר.

שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

שאלות

1) יחס T מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg \leftrightarrow f \circ g = g \circ f$.
הוכיחו או הפריכו: T יחס שקילות.

2) תהיינה A,B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A, <_B$ יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A,B בהתאמה.
תהי $f: A \to B$ פונקציה המקיימת אם $a_1 <_A a_2$, אז $f(a_1) <_B f(a_2)$.
הוכיחו כי f חח"ע אך אינה בהכרח על.

3) יהי T יחס המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא:
$fTg \Leftrightarrow$ קיים $x \in \mathbb{R}$, כך ש-$f(x) = g(x)$.
האם T יחס שקילות?

4) תהי $F: A \to A$ פונקציה, ונגדיר יחס R מעל A כך: $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$.
נתון ש-R סימטרי וטרנזיטיבי.
הוכיחו כי F היא פונקציית הזהות.

5) נגדיר יחס S על הקבוצה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ כך: $(x_1,x_2) S (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$.
S יחס שקילות (אין צורך להוכיח).
הוכיחו כי קבוצת המנה $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus S$ שווה עוצמה לקבוצה $\mathbb{R}$.

6) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-A.
נגדיר יחס E מעל A^A באופן הבא: לכל $f,g \in A^A$, fEg אם ורק אם קיימת $h \in A^A$ הפיכה, כך ש-$f = h \circ g$.
א. הוכיחו כי E יחס שקילות.
ב. יהי $c \in A$ כלשהו, ותהי $f_c: A \to A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי $\forall x \in A \quad f_c(x) = c$.
תארו את מחלקת השקילות של f_c ביחס ל-E (תנו תיאור מפורש ככל הניתן) ונמקו.

7) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A, ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.
נגדיר פונקציה $F: J \times E \to J$ באופן הבא: $F(R,S) = R \cap S$.
הוכיחו כי F על.

8) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A.
נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.
נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f,g) | B \subseteq \{x | f(x)g(x)\}\}$.

א. בהינתן $A = \{1,2,3\}$ ו- $B = \{1,2\}$, תנו דוגמה ל- $f,g,h \in F$ שונים, כך ש- $(f,g) \in E, (f,h) \notin E$.
ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.
ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E? נמקו.

9) תהי $A = \{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A,
נגדיר פונקציה $t: M \to M$, המתאימה לכל יחס את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

א. t חח״ע.
ב. t על.
ג. לכל $R \in M$ מתקיים $t(R^2) = (t(R^2))^2$.
ד. לכל $R \in M$ מתקיים $t(t(R)) = t(R)$.