פיזיקה מודרנית

פרק 12 - יחסות פרטית -

תוכן העניינים

1. טרנספרמציית לורנץ למיקום והזמן 1
2. טרנספורמציית לורנץ למהירות 6
3. תרגילים לטרנפרמציית מיקום ומהירות 7
4. דינמיקה יחסותית 10
5. תרגילים לדינמיקה יחסותית 15
6. תרגילים נוספים 17
7. כוחות ודינמיקה יחסותית 20

טרנספרמציית לורנץ למיקום והזמן:

רקע:

תורת היחסות הפרטית עוסקת בתיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות.

מערכות הייחוס תמיד יהיו מערכות אינרציאליות (צופים שזזים במהירות קבועה ביחס למערכת הכוכבים).

הגדרת מאורע:

מאורע הוא אירוע פיזיקאלי המוגדר בזמן ובמרחב.
כל מאורע ניתן לתאר ע״י ארבע קואורדינטות (x, y, z, t).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. כתוצאה מכך מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם x, y, z : שעוברת טרנספורמציה.

טרנספורמציית לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_o(x - v_o t)$$

$$t' = \gamma_o\left(t - \frac{v_o x}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v_o}{c}$$

$$\gamma_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_o}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_o\left(x' + v_o t'\right)$$

$$t = \gamma_o\left(t' + \frac{v_o x'}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

תנאים לשימוש בטרנספורמציית לורנץ:

הצירים של המערכות מקבילים.

בזמן: $t = t' = 0$ הראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת עצמית היא מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

זמן עצמי τ - מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

אורך עצמי - האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך:

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

l_0 - האורך העצמי

התארכות הזמן:

$$\Delta t = \gamma_0 \tau > \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$tan\,\theta = \gamma_0\, tan\,\theta'$$

θ' - זווית במערכת העצמית

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda'$$

λ' - אורך הגל במערכת העצמית

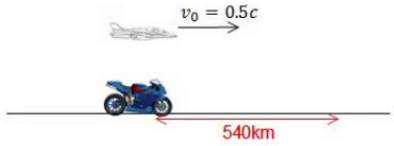
תדירות הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'$$

f' - תדירות במערכת העצמית

שאלות:

1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

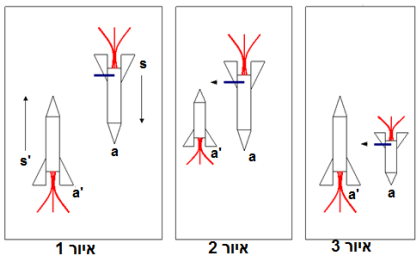


אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר.
צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של 540km.
צופה הנע במטוס ממש מהיר $v = 0.5c$, בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.

א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.

ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.

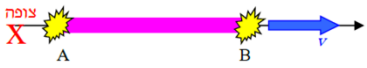
2) בדיקת ירי



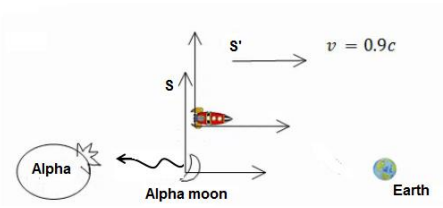
שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה.
בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית 's (איור 1).
בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה a' (זנב 's).
מכיוון שאורך החללית 's קצר מהאורך העצמי בחללית ב-s מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2).
אולם במערכת 's אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו-a' מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3).
ישב/י את הפרדוקס.

3) מוט פולט אור לסירוגין

מוט בעל אורך l_0 נע במהירות V נתונה ביחס לכדה"א.
נתון כי ב- $t=0$ הקצה השמאלי של המוט נמצא ב- $x=x'=0$.
ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.
לאחר זמן τ המוט פולט אור מקצהו הימני.
מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה"א
(הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).



4) פיצוץ בכוכב אלפה



החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה"א.
בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה
פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב.
ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם
ה"קליגונים". 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה
פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו
הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית.
מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא $0.9c$.

א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?

ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?

ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

תשובות סופיות:

1) א. $v=5.65\cdot10^7\frac{m}{sec}$ ב. $x'_2=-10.32\cdot10^5 m$

2) ראה סרטון.

3) $\Delta t=\gamma_0(1+\beta)\left(\tau-\frac{l_0}{c}\right)$

4) א. $t_3=-3.525sec$ ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.

ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס, $x_2=11.47\cdot10^8\cdot m>10.575\cdot10^8 m$

טרנספורמציית לורנץ למהירות:

רקע:

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

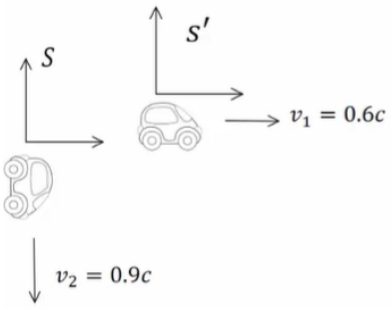
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$tan\,\theta' = \frac{sin\,\theta}{\gamma_0\left(cos\,\theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שאלות:

1) מהירות יחסית בין מכוניות

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא 0.6c ומהירות המכונית השנייה היא 0.9c.
מצא את המהירות היחסית.



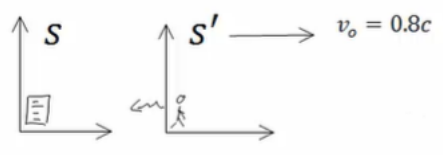
תשובות סופיות:

1) $v'_{2_x} = -0.6c$, $v'_{2_y} = -0.72c$

תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

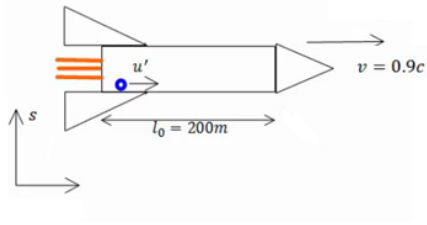
שאלות:

1) דודה יוצאת לטיול



המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יצאה לטייל במהירות $0.8c$ (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה.
כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

2) כדור מתגלגל בחללית



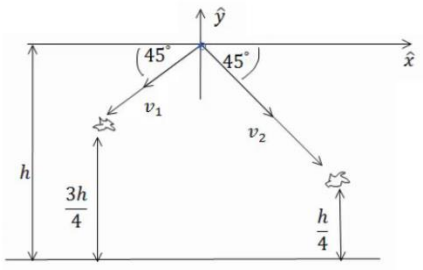
חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות $0.9c$ ביחס למערכת אינרציאלית S.
כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות $u' = 0.04c$ בכיוון ציר x, כפי שנמדד ע"י צופה בחללית.

א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב-S?
(הבא את התשובה ביחידות של c).

ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב-s?
(הבא את התשובה במיליוניות שנייה).

ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת s? (ביחידות של ק"מ).

3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



שני חלקיקים נוצרים בגובה h מעל הקרקע.
אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה-x
והשני בזווית 45– מעלות עם ציר ה-x.
החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן T בגובה $\frac{3h}{4}$
והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן T_2 בגובה $\frac{h}{4}$.
התעלם מהכבידה בבעיה.

א. הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות h ו-T.

ב. מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).

ג. מצא מערכת s' הנעה בכיוון החיובי של ציר ה-x בה ההתפרקויות מתרחשות באותו הזמן.

ד. מה המרחק בין ההתפרקויות במערכת s'?

4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון

מיואון (μ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות $0.7c$ ביחס לקרקע.
המיואון מתפרק לאחר שנע 3 ק"מ ממקום היווצרו.

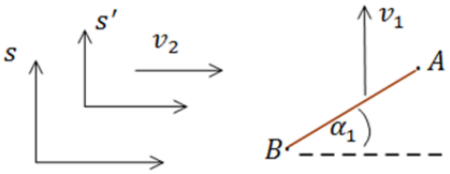
א. כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו?

אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות $0.5c$ ביחס למעבדה.

ב. מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?

ג. איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

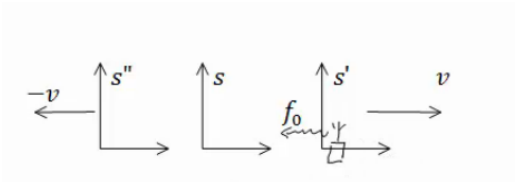
5) זווית של מוט נע



מוט בעל אורך l (לא נתון) נע במהירות v_1 בכיוון ציר ה- y ביחס לצופה הנמצא במעבדה.
הצופה במעבדה מודד זווית α_1 של המוט ביחס לציר ה- x.

איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות $v_2\hat{x}$ ביחס למעבדה?

6) תדר יחסי



במערכת s' הנעה במהירות v ביחס למערכת המעבדה S, נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות f_0 ?

א. מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?

ב. מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת s" הנעה במהירות $\vec{v}=-v\hat{x}$ ביחס למעבדה?

תשובות סופיות:

1) $\Delta t = 1.08\cdot 10^4 \sec$

2) א. $v_x = 0.907c$ ב. $t_1 = 39.62\mu s$ ג. $x_1 = 10.78km$

3) א. $v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2}T}$, $v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2}T}$ ב. $\tau_1 = T\sqrt{1-\frac{h^2}{8T^2c^2}}$, $\tau_2 = 2T\sqrt{1-\frac{9h^2}{64T^2c^2}}$

ג. $v_0 = \frac{c^2T}{h}$ ד. $d'^2 = \frac{\frac{5h^4}{4} - 3c^2T^2h^2 + c^4T^4}{h^2 - c^2T^2}$

4) א. $\tau = 10^{-5} \sec$ ב. $V_{12} = 0.31c$ ג. $\Delta x_{12} = 0.98km$

5) $\tan\alpha' = \gamma_2\left(\tan\alpha_1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right)$

6) א. $f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\, f_0$ ב. $f'' = \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2}\, f_0$

דינמיקה יחסותית:

רקע:

תנע ואנרגיה יחסותיים:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$
$$E = \gamma m c^2$$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ואינו קשור למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$$
$$|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$$

אנרגיית מנוחה:

$$E_0 = mc^2$$

אנרגיה קינטית:

$$E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו).

$$E = |p|c = \mathrm{h}\nu$$

ν – תדירות

קבוע פלאנק:

$$\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34} j \cdot s$$

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$$
$$p_x' = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$$
$$p_y' = p_y$$
$$p_z' = p_z$$

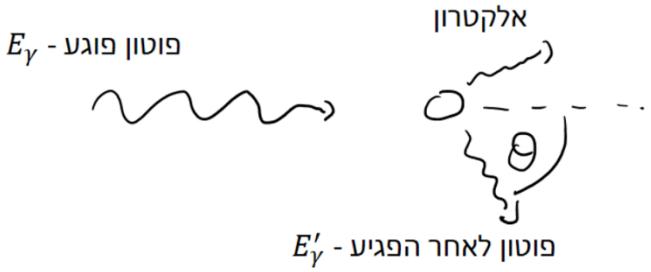
וקטור תנע אנרגיה:

$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right)$$
$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = const$$

- הקבוע זהה בכל מערכות הייחוס.
- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
- עבור גוף יחיד הקבוע הוא: m^2c^2.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$$\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט:

$$1\ \text{eV} = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Object	Mass (kg)	Energy Equivalent	
Electron	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14}$ J	(≈ 511 keV)
Proton	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10}$ J	(≈ 938 MeV)
Uranium atom	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8}$ J	(≈ 225 GeV)

ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ - $\frac{eV}{c}$.

שאלות:

1) הגעת נויטרון ממרחקים

מצא את האנרגיה הדרושה לנויטרון להגיע לכדור הארץ ממרחק של 5 שנות אור בהינתן שזמן החיים של נויטרון הוא 881 שניות והמסה שלו היא: $M_n = 940\text{Me}\frac{V}{c^2}$.

2) התנגשות בסיסית

חלקיק בעל מסה m מתנגש בחלקיק בעל מסה $3m$.

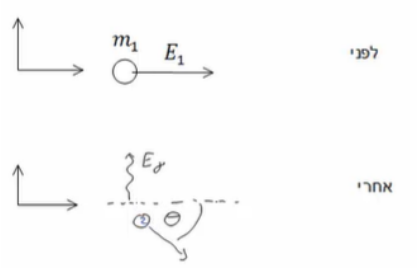
לחלקיק הראשון אנרגיה כוללת לפני ההתנגשות $5mc^2$ ונתון כי התנע הכולל שלהם במערכת המעבדה הוא אפס. כתוצאה מההתנגשות שני החלקיקים מושמדים ונוצר חלקיק חדש הנמצא במנוחה.

א. מצאו את האנרגיה הקינטית של החלקיק הראשון.

ב. מצאו את פקטור לורנץ של החלקיקים לפני ההתנגשות ואת האנרגיה הקינטית של החלקיק השני.

ג. מצאו את מסת החלקיק הנוצר לאחר ההתנגשות.

3) חלקיק מתפרק לפוטון וחלקיק נוסף



חלקיק בעל אנרגיה כוללת E_1 ומסת מנוחה m_1 נע במעבדה בכיוון החיובי של ציר ה- x.
ברגע מסוים מתפרק החלקיק לפוטון ולחלקיק נוסף.
אנרגיית הפוטון נתונה E_y וידוע כי הפוטון נע בציר ה- y, בכיוון החיובי.

א. מהו התנע של החלקיק הראשון לפני ההתפרקות?

ב. מהי הזווית של התנע של חלקיק 2 ביחס לציר ה- x?

ג. מצא מערכת ייחוס חדשה S' שבה הפוטון יפלט בכיוון נגדי לכיוון תנועתו של חלקיק מס' 2.
מה מהירותה של מערכת זו ביחס למערכת המעבדה?

4) פוטון פוגע בפרוטון ויוצר פיון

פוטון פוגע בפרוטון הנמצא במנוחה במערכת המעבדה.
נתונות מסת הפרוטון והפיון M_p, M_π.
מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לפוטון על מנת שלאחר ההתנגשות ייווצרו פרוטון ופיון (π)?

5) דוגמה - חישוב תנע ואנרגיה קינטית של אלקטרון ופרוטון

חשבו את התנע והאנרגיה הקינטית של פרוטון ואלקטרון בעלי אנרגיה של 1GeV במערכת המעבדה.

6) דוגמה - גמה וביטה של אלקטרון

מסת האלקטרון היא: $9.10938188 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ ומהירות האור היא: $299792458\ \mathrm{m/sec}$.
מצאו בדיוק של 6 ספרות את γ ו-β של אלקטרון שהאנרגיה הקינטית שלו היא: $K = 100.000\mathrm{MeV}$ במערכת המעבדה.

7) בטה של מיואונים מתפרקים

מסת מיואון היא פי 207 ממסת האלקטרון.
זמן מחצית החיים הממוצע של מיואון הוא $2.20\mu s$.
מיואונים נעים ביחס למעבדה בניסוי כלשהו.
זמן החיים הנמדד של המיואונים ביחס למערכת המעבדה הוא: $6.90\mu s$.
מהם β, התנע והאנרגיה הקינטית של המיואונים ביחידות $\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}$?

תשובות סופיות:

1) $E_n = 1.69 \cdot 10^8 \text{MeV}$

2) א. $E_{k_1 = 4mc^2}$ ב. $\gamma_1 = 5 \; , \; \gamma_2 = \sqrt{\frac{11}{3}} \; , \; E_{k_2} = 3mc\left(\sqrt{\frac{11}{3}} - 1\right)$ ג. $m_3 = 6.91m$

3) א. $\vec{p}_1 = \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - m_1^2 c^2} \cdot \hat{x}$ ב. $\tan\theta = -\frac{E_\gamma}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}$

ג. $v_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 c^2}{E_1}\right)^2} \cdot c$

4) $E_\gamma = \frac{1}{2m_p}\left(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p\right)c^2$

5) אלקטרון: $K = 0.999\text{GeV} \; , \; P = 1\frac{\text{GeV}}{c}$

פרוטון: $K = 0.062\text{GeV} \; , \; P = 0.347\frac{\text{GeV}}{c}$

6) $\gamma = 196.695 \; , \; \beta = 0.999987$

7) $\beta = 0.898 \; , \; P = 314\frac{\text{MeV}}{c} \; , \; K = 226\text{MeV}$

תרגילים לדינמיקה יחסותית:

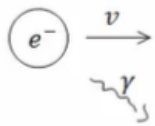
שאלות:

1) חלקיק מתפרק לשני חלקיקים

חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה מתפרק לשני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1 , m_2.

מה יהיו האנרגיה והתנע של החלקיקים שנוצרו? (כל המסות נתונות).

2) אלקטרון חופשי פולט פוטון



הראו כי אלקטרון חופשי הנע בואקום אינו יכול לפלוט פוטון בודד.

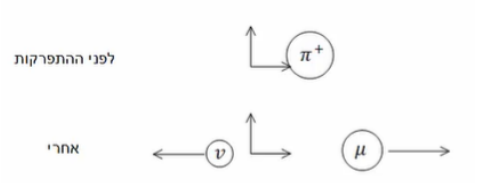
3) התנגשות חלקיקים זהים ויצירת חלקיקים

חלקיק בעל מסת מנוחה m פוגע בחלקיק זהה לו הנמצא במנוחה.

כתוצאה מההתנגשות נוצרים שני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1 , m_2 -ו.

מצא את אנרגיית הסף ליצירת ריאקציה זו. (הנח ש: $(m_1+m_2)>2m$).

4) פיון מתפרק



פיון (π^+) מתפרק למיואון חיובי ($M_\mu = 160Me\frac{V}{c^2}$)

וניטרינו חסר מסה.

מצא את מסת המנוחה של הפיון אם למיואון אנרגיה קינטית של $5MeV$.

5) פוטון מתנגש אלסטית באלקטרון



אלקטרון נע במהירות v ומתנגש בפוטון בעל אנרגיה E_γ הנע לקראתו.

מצא את הערך של v אם ידוע כי הפוטון מוחזר באותה אנרגיה בה פגע.

הנח כי מסת האלקטרון ידועה.

תשובות סופיות:

1) $E_1 = m_1c^2\gamma_1 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2 + m_1^2 - m_2^2\right)$, $p_1 = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 1}$,

$E_2 = m_2c^2\gamma_2 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2 + m_2^2 - m_1^2\right)$, $p_2 = m_2c\sqrt{\gamma_2^2 - 1} = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2 + m_2^2 - m_1^2\right)^2 - 1}$

2) שאלת הוכחה.

3) $E_{min} = \frac{1}{2m}c^2\left(\left(m_1 + m_2\right)^2 - 2m^2\right)$

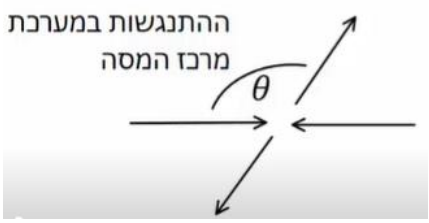
4) $M_\pi = 144\frac{MeV}{c^2}$

5) $v = c\left|1 - \left(\left(\frac{E_\gamma}{m_ec^2}\right)^2 + 1\right)^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) פוטון מתנגש ומעבר למרכז מסה



פוטון עם אנרגיה E_0 מתנגש אלסטית עם חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה (במערכת המעבדה).

א. מצא את מהירות מערכת מרכז המסה של המערכת פוטון פלוס חלקיק.

ב. מצא את התנע והאנרגיה של החלקיק והפוטון לפני ההתנגשות במערכת מרכז המסה.
מצא את התנע והאנרגיה של הפוטון והחלקיק אחרי ההתנגשות אם ידוע שהפוטון מפוזר בזווית θ ביחס לכיוון בפגיעה במערכת מרכז המסה (ראה איור).

ג. מהם האנרגיה והערך המוחלט של התנע של הפוטון והחלקיק לאחר ההתנגשות במערכת המעבדה?

ד. מצא את הזווית θ עבורה האנרגיה של הפוטון במערכת המעבדה תהיה מינימלית.

2) שאלה 1

נתונים שני גופים הנעים בניצב זה לזה. ידוע כי מסת הגופים זהה ושווה ל- M, וכן כי התנעים של הגופים הם: p_1 , p_2.
ברגע מסוים, הגופים מתנגשים ומופיעים ארבעה גופים חדשים.
מסות הגופים החדשים שנוצרו הן: m , $2m$, $3m$, $4m$.
מהו m המקסימלי האפשרי?
נתון: $p_1 = 6Mc$, $p_2 = 17Mc$.

3) שאלה 2

נתונים שני חלקיקים בעלי מסה m, וכן נתונות האנרגיות שלהם E_1 , E_2.
החלקיקים נעים זה אל עבר זה, ומתנגשים.
חשבו את מסת החלקיק M הנוצר כתוצאה מהתנגשות החלקיקים.
נתון: $E_1 = 4mc^2$, $E_2 = 7mc^2$.

4) שאלה 3

שתי חלליות יוצאות מאותה נקודה, בכיוון ניצב אחת לשנייה.
חללית א' טסה במהירות v_1, וחללית ב' טסה במהירות v_2.
חשבו את וקטור המהירות של חללית ב' ביחס לחללית א'.
נתון: $v_1 = 0.8c(+\hat{x})$, $v_2 = 0.9c(-\hat{y})$

5) שאלה 4

חלקיקים 1,2 נוצרים במעבדה ונמצאים במנוחה.
ידוע לגבי זמני החיים שלהם כי: $t_2 = 0.75t_1$ (במצב מנוחה חלקיק 2 נעלם לפני חלקיק 1).
מהי המהירות אליה יש להאיץ את חלקיק 2, כדי שלא ידעך לפני חלקיק 1?

6) זריקה אופקית יחסותית

מסלולו של חלקיק במערכת S נתון ע"י: $y = \frac{1}{2}at^2$, $x = vt$ כאשר v , a קבועים ידועים.
מצא את תאוצת החלקיק במערכת S' הנעה במהירות v בכיוון ציר ה-x ביחס ל-S.
תאר את צורת המסלול בשתי המערכות (v אינה זניחה ביחס למהירות האור).

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m}=\frac{E_0\cdot c}{mc^2+E_0}$

ב. פוטון לפני ההתנגשות: $E'_{pH}=E_0\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$, $P'_{pH}=\frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$

חלקיק לפני ההתנגשות: $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$, $P'_{m_x}=\frac{-mE_0c}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}$

פוטון אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

חלקיק אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

כיוון התנע: $\vec{P}_{pH}=\left(P(-\cos\theta),P\sin(\theta),0\right)$, $\vec{P}_m=-\vec{P}_{pH}=\left(P\cos\theta,P\sin\theta,0\right)$

ג. $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$, $|P_m|=\sqrt{\left(\frac{E_m}{c}\right)^2-m^2c^2}$

ד. $\theta=\frac{\pi}{2}$

2) $m_{max}\approx 1.45M$

3) $M\approx\sqrt{112}m$

4) $\vec{v}'=(-0.8c,-0.54c,0)$

5) $v\approx 0.66c$

6) $x'=0$, $y'=\frac{1}{2}a\gamma_0^{\,2}t'^2$

כוחות ודינמיקה יחסותית:

רקע:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\gamma^3\vec{a}_{||} + m\gamma\vec{a}_{\perp}$$

$\vec{a}_{||}$ - רכיב התאוצה שמקביל למהירות

$\vec{a}_{\perp}$ - רכיב התאוצה שמאונך למהירות

$$a_{||} = \dot{v}$$

טרנספורמציה של הכוחות:

$$F_x' = F_x - \frac{v_0\left(F_y v_y + F_z v_z\right)}{c^2 - v_0 v_x}$$

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$F_z' = \frac{F_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F_x' + \frac{v_0\left(F_y' v_y' + F_z' v_z'\right)}{c^2 + v_0 v_x'}$$

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma_0\left(1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}\right)}$$

$$F_z = \frac{F_z'}{\gamma_0\left(1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}\right)}$$

שאלות:

1) דוגמה-כוח קבוע בזמן

כוח קבוע F פועל על חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה.
מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.

2) כוח קבוע

כוח קבוע F פועל על חלקיק יחסותי בעל מסה m המתחיל תנועתו ממנוחה.

א. כתוב את משוואת התנועה של החלקיק.

ב. מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.

ג. מצא את מיקום החלקיק כתלות בזמן.

ד. רשום תנאי למהירויות נמוכות והראה שהביטוי שקיבלת למהירות ולמיקום מתכנס לפתרון הקלאסי במהירויות נמוכות.

ה. צייר גרף של המהירות היחסותית והקלאסית כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{mc}{F}$.

ו. צייר גרף של המיקום היחסותי והקלאסי כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{mc}{F}$.

3) כוח גרר מתכונתי לתנע היחסותי

כוח קבוע F פועל על מסה m המתחילה תנועתה במערכת המעבדה.
בנוסף פועל על המסה כוח גרר המתכונתי לתנע היחסותי $f=-\lambda p$ כאשר λ קבוע נתון.

א. רשום משוואת תנועה לתנע היחסותי.

ב. פתור את המשוואה ומצא מהו קבוע הזמן האופייני להתייצבות התנע על ערך קבוע.

ג. מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן.

ד. מהי המהירות בגבול של זמנים קצרים וזמנים ארוכים ביחס לקבוע הזמן שמצאת בסעיף ב'? להזכירך הפתרון של המקרה הקלאסי בו פועל כוח קבוע F על גוף וכוח גרר $f=-\lambda p$ הוא: $v(t)=\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $$v(t)=\frac{\frac{F\cdot t}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}}$$

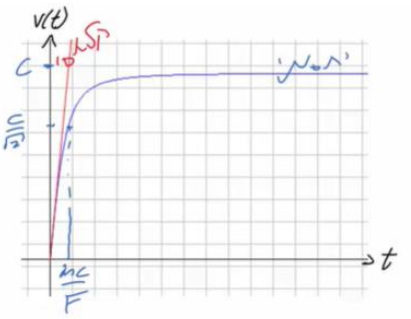
2) א. $F=m\gamma^3\dot{v}$

ב. $$v=\frac{\frac{Ft}{m}}{\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

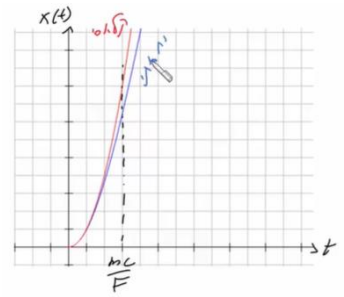
ג. $$x(t)=\frac{mc^2}{F}\left(\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

ד. ראה סרטון.

ה.



ו.



3) א. $F-\lambda p=\frac{dp}{dt}$

ב. $$p(t)=\frac{F}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\ ,\ \tau=\frac{1}{\lambda}$$

ג. $$v(t)=\frac{\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ד. זמן קצר: $v(t)=\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\approx v(t)\ ,$

זמן ארוך: $$v(t)\underset{t>>\frac{1}{\lambda}}{=}\frac{F}{\lambda m}\neq v(t)\underset{t>>\frac{1}{\lambda}}{\approx}\frac{\frac{F}{\lambda m}}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$